

日本数学会幾何学分会主催
第 60 回幾何学シンポジウム

日程： 2013 年 8 月 24 日（土）～ 27 日（火）
会場： 東京工業大学大岡山キャンパス西五号館

組織責任者： 成 慶明 (福岡大学理学部)
梅原雅頭 (東京工業大学情報理工学研究科)
納谷 信 (名古屋大学多元数理科学研究科)
塩谷 隆 (東北大学理学研究科)
山田光太郎 (東京工業大学理工学研究科)
芥川和雄 (東京工業大学理工学研究科)

— プログラム —

- A 教室：西五号館 W531
- B 教室：西五号館 W541

■8月24日(土)

13:30-14:30	A 教室	山口孝男 (筑波大学数理物質系) 崩壊とスペクトル逆問題	1
14:50-15:50	A 教室	佐野友二 (熊本大学理学部) Tian の α 不変量と K 安定性	5
.....			
16:10-16:40	A 教室	三鍋聡司 (東京電機大学工学部) 混合フロベニウス構造と局所グロモフ・ウィッテン不変量	13
16:50-17:20	A 教室	川村昌也 (首都大学東京大学院理工学研究科) 対数的末端特異点を持つ射影的カラビ・ヤウ多様体上のケーラー・リッ チフローについて	18
17:30-18:00	A 教室	武富雄一郎 (広島大学大学院理学研究科) 非コンパクト対称空間への群作用を用いた代数的 Ricci soliton の研究	23
.....			
16:10-16:40	B 教室	見村万佐人 (東北大学理学研究科) 有限ケーリーグラフの多分割等周定数の間の普遍的不等式と、導かれる 対称性	27
16:50-17:20	B 教室	田中守 (東北大学 原子分子材料科学高等研究機構) Multi-way expansion constants and expander graphs	30
17:30-18:00	B 教室	小澤龍ノ介 (東北大学大学院理学研究科) Separation distance and observable diameter of pyramids	34

■8月25日(日)

09:30–10:30	A 教室	Li Haizhong (清華大学・福岡大学理学部)	39
		Embedded constant mean curvature tori in the three-sphere	
11:00–12:00	A 教室	近藤 慶 (東海大学理学部)	49
		フィンスラー多様体の旗曲率と位相の関係 (角度の観点から)	
.....			
13:40–14:10	A 教室	森山貴之 (三重大学教育学部)	67
		佐々木・アインシュタイン多様体における特殊ルジヤンドル部分多様体の変形について	
14:20–14:50	A 教室	大鳥羽暢彦 (慶応義塾大学理工学研究科)	72
		Hirzebruch 曲面上のスカラー曲率一定計量	
15:00–15:30	A 教室	正宗淳 (東北大学大学院情報科学研究科)	77
		Long-term properties of Markov processes on a measure space in terms of Green's formula	
15:50–16:20	A 教室	久保 亮 (広島大学大学院理学研究科)	81
		複素双曲空間内の等質 Ricci soliton 超曲面	
16:30–17:00	A 教室	栗原大武 (北九州工業高等専門学校 総合科学科)	84
		複素グラスマン空間上の大対蹠集合のデザインによる特徴付け	
17:10–17:40	A 教室	坂田繁洋 (首都大学東京理工学研究科)	88
		体の中心の存在範囲と一意性	
.....			
13:40–14:10	B 教室	室谷文祥 (大阪市立大学数学研究所)	93
		正 N 角柱の対称性をもつ種数 1 の N -エンド・カテナイド	
14:20–14:50	B 教室	梶ヶ谷徹 (東北大学大学院理学研究科)	98
		法束の極小性と austere 部分多様体	
15:00–15:30	B 教室	古賀 勇 (九州大学大学院数理学府)	103
		平行な第 2 基本形式を持つ複素グラスマン多様体の部分多様体の考察	
15:50–16:20	B 教室	松村慎一 (鹿児島大学理学部)	108
		Nadel type vanishing theorem and $\bar{\partial}$ -equations	
16:30–17:00	B 教室	酒井勇輔 (東京理科大学理学研究科)	113
		階数 1 の非コンパクト型対称空間内の逆平均曲率流	
17:10–17:40	B 教室	北別府悠 (東北大学大学院理学研究科)	118
		Coarse Ricci curvature on the space of probability measures	

■8月26日(月)

09:30–10:30	A 教室	Wei Guoxin (華南師範大学)	122
		Estimates for eigenvalues of the clamped plate problem	
11:00–12:00	A 教室	高津飛鳥 (名古屋大学多元数理科学研究科)	128
		輸送不等式と測度の集中現象	
.....			
13:40–14:10	A 教室	相山玲子 (筑波大学数理物質系数数学域)	137
		Surfaces with inflection points in Euclidean 4-space	
14:20–14:50	A 教室	本田淳史 (都城工業高等専門学校)	142
		外的平坦曲面の向き付け可能性	
15:00–15:30	A 教室	河井公大朗 (東北大学大学院理学研究科)	145
		Deformations of associative submanifolds in nearly parallel G_2 -manifolds	
15:50–16:20	A 教室	近藤剛史 (東北大学大学院理学研究科)	150
		Gromov の Wirtinger space と非線形スペクトルギャップ	
16:30–17:00	A 教室	高橋淳也 (東北大学大学院情報科学研究科)	155
		一般化された連結和の崩壊と Hodge-Laplacian の固有値の収束	
17:10–17:40	A 教室	野中 純 (慶応義塾大学理工学研究科)	160
		双曲空間における Coxeter 多面体について	
.....			
13:40–14:10	B 教室	松本佳彦 (東京大学大学院数理科学研究科)	164
		CR 幾何における全 Q 曲率とその第二変分について	
14:20–14:50	B 教室	久本智之 (名古屋大学多元数理科学研究科)	169
		ケーラー計量が成す空間の測地線とカラビ型汎関数の最小値について	
15:00–15:30	B 教室	興津優史 (東京工業大学大学院理工学研究科)	174
		非コンパクトトーリックケーラー多様体の構成とその応用について	
15:50–16:20	B 教室	松尾信一郎 (大阪大学数学教室)	177
		四次元開多様体と反自己双対接続と局所平均次元	
16:30–17:00	B 教室	石田裕昭 (京都大学数理解析研究所)	182
		極大なトーラス作用を持つ複素閉多様体について	
17:10–17:40	B 教室	服部広大 (東京大学大学院数理科学研究科)	187
		Taub-NUT 変形の一般化	

■8月27日(火)

09:30-10:00	A 教室	本多正平 (九州大学)	191
		リッチ曲率と L_p 収束	
		
09:30-10:00	B 教室	渋谷一博 (広島大学大学院理学研究科)	196
		Type-changing PDE and singularities of Monge characteristic systems	
		
10:10-11:10	A 教室	三石史人 (東北大学理学研究科)	201
		距離空間の局所リプシッツ可縮性と整数係数カレントのホモロジー	
11:30-12:30	A 教室	楯 辰哉 (東北大学理学研究科)	211
		一次元量子ウォークの諸相	

Collapsing and inverse spectral problems

Takao Yamaguchi
University of Tsukuba

1. INTRODUCTION

Let Δ be the Laplace-Beltrami operator on a compact Riemannian manifold M , and

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots ,$$

be the set of eigenvalues of Δ counted multiplicities with for instance the Neumann problem if M has nonempty boundary. Let $\{\phi_k\}$ be corresponding eigenfunctions forming a complete orthonormal system of $L^2(M, \mu_M)$, where $\mu_M = dV/vol(M)$ is the normalized Riemannian measure.

We are concerned with inverse spectral problems which ask the influence of spectral data of Δ on the the geometry of M . Our interest is to reconstruct the manifold from certain spectral data. It is well known that the spectrum $\{\lambda_k\}$ is not sufficient for this purpose. There are several formulations for the setting of spectral data to settle the problem. A typical one is the boundary spectral data consisting of the spectrum $\{\lambda_k\}$ and the eigenfunctions $\{\phi_k|_{\partial M}\}$ restricted to the boundary ∂M if it is not empty (see the monograph [5] for details). In this direction, Anderson, Katsuda, Kurylev, Lassas and Taylor [1] discussed the stability of the inverse boundary spectral problem in a certain moduli space of Riemannian manifolds with boundary such that no collapse occurs there.

In this lecture, we adopt local data of the heat kernel as spectral data, and consider inverse spectral problems in the moduli space $\mathcal{M} = \mathcal{M}(n, D)$ of n -dimensional closed Riemannian manifolds M whose sectional curvatures and diameters satisfy

$$|sec(M)| \leq 1, \quad diam(M) \leq D,$$

for any fixed n and $D > 0$. We discuss the uniqueness and the stability of inverse spectral problems for spaces in the compactification of \mathcal{M} with respect to the measured Gromov-Hausdorff topology. This is a recent joint work with Yaroslav Kurylev and Matti Lassas [7].

2. CONVERGENCE OF LAPLACIANS

A (not necessarily continuous) map $\varphi : X \rightarrow Y$ between compact metric spaces is called an ϵ -approximation if

- (1) $|d(\varphi(x), \varphi(y)) - d(x, y)| < \epsilon$ for any $x, y \in X$;
- (2) $\varphi(X)$ is ϵ -dense in Y .

The Gromov-Hausdorff distance $d_{GH}(X, Y)$ is defined as the infimum of those ϵ that there are ϵ -approximations from X to Y and from Y to X . By the precompactness theorem due to Gromov, \mathcal{M} is relatively compact with respect to the Gromov-Hausdorff distance. So it is quite natural to consider a sequence $M_i \in \mathcal{M}$ converging to a space $X \in \overline{\mathcal{M}}$. The curvature bound implies $\dim X \leq n$. We say that M_i collapses to X iff $\dim X \leq n - 1$.

A basic problem in the theory of collapsing is to find geometric or analytic relations between M_i and X for sufficiently large i .

Geometry of collapsing in \mathcal{M} was studied by Fukaya, Cheeger-Gromov. For instance, X is an orbifold and there exists a (singular) fibration from M_i to X ([3]).

Here we are concerned with the analysis of collapsing.

Let

$$\Delta_M = -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j)$$

be the Laplace-Beltrami operator acting on functions on M , and

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots,$$

the set of eigenvalues of Δ_M (counted multiplicities). Fukaya studied the convergence of the Laplacian in \mathcal{M} . To recall his result, we need to recall the convergence of measures.

Let $\mu_M = dV/vol(M)$ be the normalized Riemannian measure. \mathcal{MM} denotes the set of all (M, μ_M) with $M \in \mathcal{M}$. It is known that \mathcal{MM} is relatively compact with respect to the measured G-H topology. Thus passing to a subsequence, we may assume that (M_i, μ_{M_i}) converges to (X, μ) wrt the measured G-H topology, where μ is a probability measure on X . This means that for a measurable ϵ_i -approximation map $\varphi_i : M_i \rightarrow X$, ($\epsilon_i \rightarrow 0$), the pushforward measure $(\varphi_i)_*(\mu_{M_i})$ converges to μ (wrt. weak*-topology).

Under the situation above, Fukaya ([4]) proved that Δ_{M_i} converges to a self-adjoint operator $\Delta_{(X, \mu)}$ in $L^2(X, \mu)$ in a sense of L^2 -convergence. In particular $\lambda_k(\Delta_{M_i})$ converges to $\lambda_k(\Delta_{(X, \mu)})$ as $i \rightarrow \infty$ for each $k = 0, 1, 2, \dots$

As a typical example, let us consider the torus $T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{is}, e^{it})\}$ with metrics

$$g_\epsilon = ds^2 + \epsilon^2 c(s)^2 dt^2,$$

where $c(s)$ is a positive smooth function on S^1 . When $\epsilon \rightarrow 0$, $(T^2, g_\epsilon, \mu_{(T^2, g_\epsilon)})$ converge to $(S^1, ds^2, c(s)ds^2)$ wrt the measured GH-topology. The Laplacian of g_ϵ is written as

$$\Delta_{g_\epsilon} = -\frac{1}{c(s)} \partial_s (c(s) \partial_s) - \epsilon^{-2} c(s)^{-2} \partial_t^2.$$

As $\epsilon \rightarrow 0$, Δ_{g_ϵ} converges to the operator $\Delta_c := -\frac{1}{c(s)} \partial_s (c(s) \partial_s)$ on S^1 , and $\lambda_k(T^2, g_\epsilon) \rightarrow \lambda_k(\Delta_c)$ for each $k = 0, 1, 2, \dots$

The limit operator $\Delta_{(X, \mu)}$ can be described in more detail. The measure μ can be written as $\mu = \rho \mu_X$, where μ_X is the normalized Riemannian measure on the regular part X^{reg} of X . (X^{reg} has full measure in X).

Kasue ([6]) proved that the density function ρ is of class $C^{1, \alpha}$ on X^{reg} . The density function ρ can be described in terms of volumes of orbits of some isometric pseudogroup action. Extending classical result on the smoothness of isometric actions due to Montgomery-Zippin[8] and Calabi- Hartman[2], we can generalize Kasue's result by showing that ρ is of class C_*^2 on X^{reg} . Note $C^{1,1} \subsetneq C_*^2 \subsetneq C^{1, \alpha}$. The limit operator can be written as

$$\Delta_{(X, \mu)} = \frac{-1}{\rho \sqrt{g}} \partial_i (\rho \sqrt{g} g^{ij} \partial_j).$$

3. INVERSE SPECTRAL PROBLEMS

So far we have discussed the direct problems. Now we come to the inverse problems. Let (X, μ) be any element of the compactification $\overline{\mathcal{MM}}$. We ask : Only from local spectral data of $\Delta_{(X, \mu)}$, can one determine (X, μ) or approximately nearby (M, μ_M) ?

As local spectral data, we use the heat kernel $H_{(X, \mu)}(x, y, t)$ of $\Delta_{(X, \mu)}$, restricted to some domain. For any fixed open subset $\Omega \subset X$, take a countable dense set $\{z_\alpha\}$ of Ω and a countable dense set $\{t_\ell\}$ of $(0, \infty)$. We measure the point heat data on those countable points and times, and consider the countable data, called point heat data:

$$PHD(\Omega) := \{H_{(X, \mu)}(z_\alpha, z_\beta, t_\ell)\}_{\alpha, \beta, \ell=1}^\infty.$$

Our uniqueness result claims that the point heat data $PHD(\Omega)$ uniquely determines the metric measure space (X, μ) .

To discuss stability, we have to fix any positive number r_0 , which should be called an observation radius. Now we measure point heat data on finitely many points in a metric ball of radius r_0 at finitely many times. We say that two pointed metric measure spaces (X, p, μ) and (X', p', μ') in the compactification $\overline{\mathcal{MM}}$ have δ -close PHD if and only if there are δ -dense subsets $\{z_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ and $\{z'_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ of $B(p, r_0)$ and $B(p', r_0)$ respectively, together with a δ -dense time set $\{t_\ell\}_{\ell=1}^T$ in (δ, δ^{-1}) such that

$$|H_{(X,\mu)}(z_\alpha, z_\beta, t_\ell) - H_{(X',\mu')}(z'_\alpha, z'_\beta, t_\ell)| < \delta.$$

Our stability result claims that if (X, p, μ) and (X', p', μ') in $\overline{\mathcal{MM}}$ have δ -close PHD, then the “pointed measured GH-distance” between (X, p, μ) and (X', p', μ') is less than $\tau(\delta)$, where $\tau(\delta)$ is a function of δ depending only on n, D and r_0 such that $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \tau(\delta) = 0$.

Here we define the notion of pointed measured Gromov-Hausdorff distance $d_{pmGH}((X, p, \mu), (X', p', \mu'))$ by generalizing the Prohorov metric on the set of probability measures on a fixed space. This metric provides a topology equivalent to the measured GH-topology, and $d_{pmGH}((X, p, \mu), (X', p', \mu')) = 0$ holds if and only if there is an isometry $f : X \rightarrow X'$ sending p to p' such that $f_*(\mu) = \mu'$.

REFERENCES

- [1] M. Anderson, A. Katsuda, Y. Kurylev, M. Lassas and M. Taylor, *Boundary regularity for the Ricci equation, Geometric Convergence, and Gel'fand's Inverse Boundary Problem*, Invent. Math., **158**, (2004), 261–321.
- [2] Calabi E, Hartman P. *On the smoothness of isometries*. Duke Math. J., bf 37 (1970), 741-750.
- [3] K. Fukaya, *A boundary of the set of the Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters*, J. Differential Geom. 28 (1988), 1–21.
- [4] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator*, Invent. Math. 87 (1987), 517–547.
- [5] A. Katchalov, Y. Kurylev, M. Lassas, *Inverse Boundary Spectral Problems*, Chapman Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **123**, 2001.
- [6] A. Kasue, *Measured Hausdorff convergence of Riemannian manifolds and Laplace operators*, Osaka J. Math., **30**, (1993), 613–651.
- [7] Y. Kurylev, M. Lassas and T. Yamaguchi, *Uniqueness and Stability in Inverse spectral problems for collapsing manifolds*, arXiv:1209.5875
- [8] Montgomery D., Zippin L. *Topological Transformation Groups*. R.E.Kruger Publ., N.Y, 1974.
- [9] T. Yamaguchi, *Reconstruction of collapsed manifolds*, Proceeding of ICM2010, Vol II, 899-913, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

Tian の α 不変量と K 安定性

佐野友二 (熊本大・理学部)

1 背景

本講演の主結果は尾高悠志氏との共同研究 ([6]) によるものである。本講演の目的は、Tian が導入した α 不変量とケーラー・アインシュタイン計量および K 安定性の関係について微分幾何・代数幾何の視点から紹介することにある。

X を n 次元ファノ多様体とする。つまり、第 1 チャーン類 $c_1(X)$ を正定値とする。ここで $c_1(X)$ を X のケーラー類とし、それを代表するケーラー形式 $\omega_0 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \in c_1(X)$ を固定する。ケーラー形式 $\omega_\varphi := \omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \in c_1(X)$ がケーラー・アインシュタイン (以下, KE) 形式であるとは、リッチ形式 $\text{Ric}(\omega_\varphi)$ が ω_φ に等しいことを言う。この条件は、モンジエ・アンペール方程式

$$\frac{\det(g_{i\bar{j}} + \varphi_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}})} = \exp(h_0 - \varphi) \quad (1)$$

の解の存在に帰着される。 $h_0 \in C_{\mathbb{R}}^\infty(X)$ を

$$\text{Ric}(\omega_0) - \omega_0 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h_0, \quad \int_M e^{h_0} \omega_0^n = \int_M \omega_0^n$$

で定義される関数とする。方程式 (1) は、連続法より次の方程式の $t = 1$ における解の存在に帰着される。

$$\frac{\det(g_{i\bar{j}} + (\varphi_t)_{i\bar{j}})}{\det(g_{i\bar{j}})} = \exp(h_g - t\varphi_t), \quad t \in [0, 1]. \quad (2)$$

(2) の解空間

$$T := \{t \in [0, 1] \mid (2) \text{ is solvable at } t\}$$

は常に空でない開集合であることが分かる。よって、 $t = 1$ での解の存在は T が閉集合であるか否かに帰着される。さらに、Yau のアприオリ評価により φ_t の C^0 評価に帰着される。Tian は φ_t の C^0 評価を得るために次の不変量を導入した。

定義 1.1 ([9]) $G \subset \text{Aut}(X)$ を X の正則自己同型群 $\text{Aut}(X)$ のコンパクト部分群とする。

$$\alpha_G(X) := \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \mid \int_X e^{-\alpha\psi} \omega_0^n < \exists C_\alpha, \forall \psi \in P_G(X, \omega_0)\}. \quad (3)$$

ただし

$$P_G(X, \omega_0) := \{\psi \in C_{\mathbb{R}}^2(X) \mid \omega_0 + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\psi > 0, \sup \psi = 0, \psi : G\text{-invariant}\}$$

とする。 C_α は α (および ω_0, G) のみ依存する定数とする。

$\alpha_G(X)$ は ω の取り方に依らない不変量であり、 $\alpha_G(X) > 0$ が成り立つ。 G が自明なとき、単に $\alpha(X)$ と書く。

定理 1.2 ([9]) $\alpha_G(X) > \frac{n}{n+1}$ ならば、((2) の解が $t \in [0, 1)$ で存在すれば) $\|\varphi_t\|_{C^0} \leq C$ が成り立つ。 C は t に依存しない定数とする。特に X は G -不変な KE 計量を持つ。

[9] の証明より, $\alpha(X) > \frac{n}{n+1}$ ならば KE 計量の空間がコンパクトであることが分かる. このことより, 次のことが示される.

系 1.3 $\alpha(X) > \frac{n}{n+1}$ ならば $\text{Aut}(X)$ は有限群である.

定理 1.2 は, 2 次元, 3 次元の場合をはじめ, 多くの KE 多様体の具体例を与えた. その 1 つの理由に, X の対称性が高い場合に $\alpha_G(X)$ の値を大きくすることができるからである. もう 1 つの理由は, $\alpha_G(X)$ は代数幾何において対応する不変量として知られており, 代数的に具体的に計算されていることにある (cf. [2]).

一方で, 最近の結果によりファノ多様体上の KE 計量の存在性が X を偏極多様体と見たときの多様体の安定性と対応していることが示された.

定理 1.4 (Chen-Donaldson-Sun, Tian) 偏極多様体 $(X, \mathcal{O}(-K_X))$ が KE 計量を持つことと K 準安定であることは同値である.

$\mathcal{O}(-K_X)$ を反標準因子 $-K_X$ から定まる直線束とする. ここでは直線束と可逆層を同一視している.

定理 1.2, 1.4 および系 1.3 を合わせると次のことが分かる.

系 1.5 $\alpha(X) > \frac{n}{n+1}$ ならば $(X, \mathcal{O}(-K_X))$ は K 安定である.

前述した $\alpha(X)$ の代数的対応物に置き換えることで系 1.5 を代数幾何の言葉で述べることができる. この結果に代数的な証明を与えたことが本講演の主結果である. 正確な主張は定義を含めて次の章で説明する.

2 定義および主結果

まず, $\alpha(X)$ の代数的対応物について説明する. 簡単のために X を非特異なファノ多様体とする¹. $D = \sum d_i D_i$ を有効 \mathbb{Q} -因子とする. つまり $d_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ かつ D_i を余次元 1 の閉概型とする. 組 (X, D) に対して, 次の条件を満たす特異解消 $\pi: X' \rightarrow X$ を考える.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \pi \text{ は固有な双有理射.} \\ \bullet X' \text{ は非特異.} \\ \bullet \pi^* D + E \text{ は単純正規交叉因子である.} \end{array} \right.$$

ただし E を π の例外因子とする. X 上の因子 D が単純正規交叉因子であるとは, 各規約成分が非特異かつ各点での局所定義方程式が $z^{i_1} \cdots z^{i_k} = 0$ ((z^1, \dots, z^n) を X の局所座標とする) で書けるときを言う. このような特異点解消 $\pi: X' \rightarrow X$ を (X, D) のログ特異点解消と呼び, (X, D) をログ対と呼ぶ. ログ特異点解消は D の特異点を含めて特異点解消するため X が非特異でも自明ではないことに注意する. $K_{X'}$ を X' の標準因子とし, $\pi^*(K_X + D)$ との差を考える.

$$K_{X'} - \pi^*(K_X + D) = \sum a_i E_i.$$

ただし E_i は π の例外集合および D の固有変換 $\pi_*^{-1} D$ の台に台を持つ X' 上のすべての素因子とする. $a_i \in \mathbb{Q}$ をログ食い違い係数と呼ぶ. これは π の取り方に依らない. a_i を用いて (X, D) の特異点を定義する. (X, D) がログ標準的 (log canonical, 以下 lc) であるとは, すべての a_i が -1 以上であるときを言う.

¹本稿の主結果は, X が \mathbb{Q} -ファノ多様体でも成り立つ.

定義 2.1

$$\text{lct}(X, D) := \sup\{c \in \mathbb{Q}_{>0} \mid (X, D) : lc\}, \quad (4)$$

$$\text{lct}(X) := \inf_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \inf_{D \equiv_{\mathbb{Q}} -mK_X} \text{lct}(X, \frac{1}{m}D). \quad (5)$$

$\text{lct}(X, D)$ をログ標準閾値, $\text{lct}(X)$ を大域的ログ標準閾値と呼ぶ. ただし $D \equiv_{\mathbb{Q}} -mK_X$ は D と $-mK_X$ が \mathbb{Q} 上で数値的同値であることを意味する.

一般に $\text{lct}(X, D)$ を求めることは簡単ではないが, 次のような簡単な状況で $\text{lct}(X, D)$ を考えてみる. X を非特異, $D = \sum d_i D_i$ を単純正規交叉因子とする. このとき, ログ特異点解消 π は恒等写像になるので, $\text{lct}(X, D) = \min\{\frac{1}{d_i}\}$ となる. 一般には

$$\text{lct}(X, D) = \min_{E_i} \left\{ \frac{1 + \text{ord}_{E_i}(K_{X'/X})}{\text{ord}_{E_i}(D)} \right\}$$

となる. $K_{X'/X}$ は $K_{X'} - \pi^*K_X$ と線形同値な因子とする. $\text{ord}_E(D)$ は (スキーム論の意味での) 逆像 $\pi^{-1}(D)$ に含まれる E の係数とする. π がログ特異点解消でないときには

$$\text{lct}(X, D) \leq \min_{E_i} \left\{ \frac{1 + \text{ord}_{E_i}(K_{X'/X})}{\text{ord}_{E_i}(D)} \right\} \quad (6)$$

となる².

次の結果は $\text{lct}(X)$ が $\alpha(X)$ の代数的対応物であることを保証している.

定理 2.2 ([2], Appendix) X が非特異なファノ多様体のとき

$$\alpha(X) = \text{lct}(X)$$

が成り立つ.

上の定理の証明を簡単に振り返る. 因子 D が局所的に正則関数の零点集合 ($\sigma = 0$) で表されているとする. このとき $\varphi_D := \log |\sigma|^2$ とおくと多重劣調和関数になる. φ_D が誘導する乗数イデアル層 $\mathcal{I}(\varphi_D)$ を

$$\Gamma(U, \mathcal{I}(\varphi_D)) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid \int_U |f|^2 e^{-\varphi_D} d\mu < \infty\}.$$

で定義すると, すべてのログ食い違い係数 a_i が -1 より大きいこと³と, $\mathcal{I}(\varphi_D) = \mathcal{O}_X$ であることが同値である. よって

$$\text{lct}(X, D) = \sup\{c > 0 \mid e^{-c\varphi_D} \in L_{loc}^1\}$$

が成り立つ. この議論と近似定理を用いることで定理 2.2 が示される.

G が自明ではない場合には, 次の不変量が $\alpha_G(X)$ と等しい.

$$\text{lct}_G(X) := \inf_{m \in \mathbb{Z}_{>0}} \inf_{\Sigma} \text{lct}(X, \frac{1}{m}\Sigma).$$

ただし, Σ は完備線形系 $|-mK_X|$ の G -不変な部分線形系とする. また組 (X, Σ) が lc であるとは, 次を満たす特異点解消 $\pi: X' \rightarrow X$ が存在することとする.

²実際のところ, 定理 2.4, 特に補題 3.5 では, $\text{lct}(X, D)$ というよりも (6) の右辺を評価することで証明が行なわれている.

³このときの (X, D) の特異点を Kawamata log terminal と呼ぶ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \pi^*\Sigma = F + \Sigma', \exists F: \text{有効因子}, \exists \Sigma' \subset |\pi^*(-mK_X) - F| \\ \bullet \Sigma': \text{自由} \\ \bullet F + E: \text{単純正規交叉因子} \\ \bullet K_{X'} - \pi^*(K_X + F) = \sum a_i E_i + D \text{ に対して, } a_i \geq -1 \text{ for } \forall i \text{ が成り立つ.} \\ \text{ただし, } D \text{ を non-exceptional part とする.} \end{array} \right.$$

次に, K 安定性について説明する (cf. [3], [10]). X をファノ多様体, $L = \mathcal{O}(-K_X)$ とする. (X, L) の \mathbb{G}_m -同変な平坦な変形族 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が次の条件を満たすとき, $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を (X, L) の指数 r のテスト配位と呼ぶ.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet (\mathcal{X}, \mathcal{L}) \text{ に } \mathbb{G}_m (= \mathbb{C}^\times) \text{ が作用している.} \\ \bullet \pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}^1 (= \mathbb{C}) \text{ が固有かつ平坦, かつ } \mathbb{G}_m\text{-同変.} \\ \bullet \mathcal{L}: \mathcal{X} \text{ 上の } \mathbb{G}_m\text{-同変な相対的に豊富な直線束.} \\ \bullet \pi^{-1}(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \simeq (X, L^{\otimes r}) \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}). \end{array} \right.$$

\mathcal{X} が $X \times \mathbb{A}^1$ (\mathbb{G}_m -作用は考えない) と同型るとき, 直積テスト配位と呼ぶ. \mathcal{X} の正規化 \mathcal{X} が $X \times \mathbb{A}^1$ (\mathbb{G}_m -作用は自明) と同型るとき, $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を自明なテスト配位と呼ぶ.

\mathbb{G}_m -作用は \mathcal{X} の中心ファイバーを保つので, 各 $K \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して有限次元ベクトル空間 $H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}^{\otimes K} |_{\mathcal{X}_0})$ にも作用する. その作用の全ウエイトを $w(Kr)$ とおき, $P(Kr) := \dim H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}^{\otimes K} |_{\mathcal{X}_0})$ とする. π が平坦であることから, 後者は $\dim H^0(X, L^{\otimes Kr})$ に等しい. $k := Kr$ とし, \mathbb{G}_m の $H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}^{\otimes K} |_{\mathcal{X}_0})$ への作用が SL 作用になるように正規化された全ウエイトを $\tilde{w}_{r,k}$ とおくと,

$$\tilde{w}_{r,k} = w(k)rP(r) - w(r)kP(k)$$

が成り立つ. Riemann-Roch の定理およびその同変版を用いることで, $\tilde{w}_{r,k}$ は k に関して漸近展開

$$\tilde{w}_{r,k} = \sum_{i=0}^{n+1} e_i(r)k^i, \quad k \gg 0$$

を持つことが分かる. 特に $e_{n+1}(r)$ は X を $\mathbb{P}(H^0(X, L^r)^*)$ に埋め込んだときのチャウ・ウエイトに (正の定数倍を除き) 等しい. さらに $e_i(r)$ も r に関する漸近展開を持ち, 特に

$$e_{n+1}(r) = e_{n+1,n}r^n + \dots$$

となる. $\tilde{w}_{r,k}$ の正規化より, $e_{n+1,n+1} = 0$ になることに注意する. $e_{n+1,n}$ をテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の Donaldson-二木不変量と呼ぶ.

定義 2.3 (X, L) が K 半安定であるとは, すべてのテスト配位に対して $e_{n+1,n} \geq 0$ が成り立つときを言う. (X, L) が K 安定であるとは, すべての自明ではないテスト配位に対して $e_{n+1,n} > 0$ が成り立つときを言う. (X, L) が K 準安定であるとは, K 半安定かつ “ $e_{n+1,n} = 0$ ならば $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が直積テスト配位と同型” が成り立つときを言う.

G が自明な場合, 定理 1.2 の代数版を次のように述べる事が出来る.

定理 2.4 ([6]) X を n 次元ファノ多様体とする. $\text{lct}(X) > \frac{n}{n+1}$ (resp. $\geq \frac{n}{n+1}$) のとき, $(X, \mathcal{O}(-K_X))$ は K 安定 (resp. K 半安定) である. さらに $\text{lct}(X) > \frac{n}{n+1}$ ならば $\text{Aut}(X)$ は有限である.

G が自明ではない場合には (部分的ではあるが) 次の結果が得られる.

定理 2.5 ([6]) X を n 次元ファノ多様体とする. $\text{lct}_G(X) > \frac{n}{n+1}$ (*resp.* $\geq \frac{n}{n+1}$) を満たす連結な可解部分群 $G \subset \text{Aut}(X)$ が存在するとき, $(X, \mathcal{O}(-K_X))$ は K 安定 (*resp.* K 半安定) である. 特に $\text{lct}_G(X) > \frac{n}{n+1}$ ならば, G は自明である.

系 2.6 ([6]) $\text{lct}_G(X) > \frac{n}{n+1}$ を満たす連結なコンパクト部分群 $G \subset \text{Aut}(X)$ が存在するとき, $\text{Aut}(X)$ は半単純である.

例 2.7 X を (Batyrev-Selivanova [1] の意味で) 対称なトーリックファノ多様体とすると, $\alpha_G(X) = 1$ となるコンパクト群 G が存在するが, $\text{Aut}(X)$ は半単純ではない. この例では G が連結ではないことに注意する.

例 2.8 $\Gamma \subset SO(3) \subset PSL(2, \mathbb{C})$ を 20 面体群とする. X を $SL(2, \mathbb{C})/\Gamma$ をコンパクト化して得られる 3 次元ファノ多様体とする⁴. このとき $G = SO(3)$ とおくと $\alpha_G(X) = \frac{5}{6}$ であり ([4]), $\text{Aut}(X) = PGL(2, \mathbb{C})$ になる.

3 証明の流れ

証明のポイントは 2 つある. 1 つは, テスト配位の簡易化とそれに対する Donaldson-二木不変量の計算である⁵. 2 つめは, $\text{lct}(X)$ による Seshadri 定数の評価である.

まず, テスト配位の簡易化について説明する. 一般に, 任意のテスト配位に対して Donaldson-二木不変量を評価することは簡単ではない. そこで, ブローアップを用いて構成されるテスト配位について考える. X 上の接続イデアル層の列 $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_{N-1} \subset \mathcal{O}_X$ ($N \geq 1$) に対して, $X \times \mathbb{A}^1$ 上の接続イデアル層

$$J := I_0 + tI_1 + \cdots + t^{N-1}I_{N-1} + (t^N) \subset \mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}^1}$$

を定義する. J は $X \times \mathbb{A}^1$ の中心ファイバーに台を持つことに注意する. \mathcal{B} を $X \times \mathbb{A}^1$ を J に沿ってブローアップしたものとす. $\mathcal{L}_{(r)}$ を $\mathcal{B} \rightarrow X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow X$ による X 上の直線束 L の引き戻しで得られる \mathcal{B} 上の直線束とする. E をブローアップ $\Pi: \mathcal{B} \rightarrow X \times \mathbb{A}^1$ の例外因子とする. r が十分大きければ, $\mathcal{L}_{(r)}(-E)$ は相対的に豊富になり, $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ は (X, L) の指数 r のテスト配位を定める. これは [7] で導入された多様体のスロープ安定性を定義する際に用いられるテスト配位の拡張である⁶. $\mathcal{L}_{(r)}(-E)$ の豊富性は次の量を用いて計られる.

$$\text{Sesh}(J) := \sup\{c \in \mathbb{Q}_{>0} \mid \Pi^* \mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}^1}(-K_{X \times \mathbb{A}^1})(-cE) : \text{ample}\}.$$

これを $(X \times \mathbb{A}^1, \mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}^1}(-K_{X \times \mathbb{A}^1}))$ に対する J の Seshadri 定数と呼ぶ. ここで, テスト配位の偏極 \mathcal{L} の豊富性を緩めて, テスト配位の定義を拡張する. \mathcal{L} が半豊富 (i.e. $|nL|$ が自由になるような n が存在する) のとき, $H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}^{\otimes K} |_{\mathcal{X}_0})$ を $H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}^{\otimes K} |_{\mathcal{X}_0})/tH^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}^{\otimes K} |_{\mathcal{X}_0})$ に置き換えることで, 同様に Donaldson-二木不変量を定義することが出来る. 半豊富な偏極を持つテスト配位を半テスト配位と呼ぶ. 定義より $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ が半テスト配位ならば

$$\frac{1}{r} \leq \text{Sesh}(J)$$

が成り立つ. [8] の議論を精密化することで次の結果が得られる.

⁴Mukai-Umemura 3-fold と呼ばれている多様体であり, KE 計量を持つ. cf. [10].

⁵これは尾高氏の結果によるものである.

⁶ $N = 1$ のときが [7] で用いられたテスト配位 (degeneration to the normal cone) に相当する.

命題 3.1 ([5]) (X, L) が K 安定であることと, $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ が半テスト配位になるようなすべての J, r に対して, $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ の Donaldson-二木不変量が正であることは同値である.

この命題により, $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ の Donaldson-二木不変量を計算出来れば, K 安定性を判定することが出来る.

定理 3.2 ([5]) $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ の Donaldson-二木不変量は (正の定数倍を除き) 次の交点数と等しい.

$$-((\overline{\mathcal{L}_{(r)}} - E)^n \cdot \overline{\mathcal{L}_{(r)}}) + ((\overline{\mathcal{L}_{(r)}} - E)^n \cdot ((n+1)rK_{\mathcal{B}/(X \times \mathbb{A}^1)} - nE)) \quad (7)$$

ただし, 上の交点数は $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ の自然なコンパクト化の上で定義されているとする.

次の補題は (7) の第 1 項が $(\text{lct}(X))$ の条件に関わらず) 常に非負であることを示している.

補題 3.3 $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ が半テスト配位になるようなすべての J, r に対して

$$-((\overline{\mathcal{L}_{(r)}} - E)^n \cdot \overline{\mathcal{L}_{(r)}}) \geq 0$$

が成り立つ. 等号成立は $\dim \text{Supp}(\mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}^1}/J) = 0$ のときに限る.

$\overline{\mathcal{L}_{(r)}} - E$ が \mathcal{B} の中心ファイバーにおいてネフであること, $(n+1)rK_{\mathcal{B}/(X \times \mathbb{A}^1)} - nE$ が \mathcal{B} の中心ファイバーで台を持つ零でない有効因子であることに注意すると次のことが分かる.

補題 3.4 $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ が半テスト配位になるような任意の J, r に対して

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)K_{\mathcal{B}/(X \times \mathbb{C})} - \text{Sesh}(J)E > \varepsilon E \quad (8)$$

を満たす $\varepsilon > 0$ が存在するならば,

$$((\overline{\mathcal{L}_{(r)}} - E)^n \cdot ((n+1)rK_{\mathcal{B}/(X \times \mathbb{A}^1)} - nE)) > 0$$

が成り立つ.

上の 2 つの補題より, (X, L) が K 安定であることを示すには (8) を満たすように Seshadri 定数を上から評価すれば良い. それは次のように $\text{lct}(X)$ の下限を用いて評価される.

補題 3.5

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{B}/X \times \mathbb{A}^1} &= \sum a_i E_i \\ \Pi^*(X \times \{0\}) &= \Pi_*^{-1}(X \times \{0\}) + \sum b_i E_i \\ \Pi^{-1}J &= \mathcal{O}_{\mathcal{B}}(-\sum c_i E_i) \end{aligned} \quad (9)$$

とおく⁷. このとき $\text{lct}(X) > \frac{n}{n+1}$ ならば

$$\text{Sesh}(J) < \frac{n+1}{n} \min \left\{ \frac{a_i - b_i + 1}{c_i} \right\} \quad (10)$$

が成り立つ.

⁷ a_i は $X \times \mathbb{A}^1$ の食い違い係数である.

簡単な場合に上の補題を確かめてみる. $D = \sum d_i D_i$, $d_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし, D に対応する接続イデアル層を I_D とおく. $J = I_D + (t)$ の場合を考える. $c < \text{Sesh}(I_D)$ を満たす c に対して, 定義より $-K_X - cD$ は豊富になる. よって, $D' \equiv -K_X$ かつ $D' = cD + F$ (F : 有効因子) を満たす D' が存在する. $\text{lct}(X, D) = \min\{\frac{1}{d_i}\} \leq 1$ であることに注意すると

$$\frac{1}{c} \geq \frac{1}{c} \text{lct}(X, D) \geq \text{lct}(X, D') \geq \text{lct}(X)$$

を満たす. よって $\text{Sesh}(I_D) \leq \frac{1}{\text{lct}(X)} < \frac{n+1}{n}$ が成り立つ. 一方で, $a_i = c_i = d_i$, $b_i = 1$ より (10) の右辺は $\frac{n+1}{n}$ に等しい.

(9) と (10) を代入することで (8) が得られ, 定理 2.4 が従う. G が自明でない場合にもほぼ同じように示される.

4 $\alpha(X) = \frac{n}{n+1}$ のとき

X を非特異なファノ多様体とし, $\text{lct}(X) = \frac{n}{n+1}$ とする. 定理 2.4 より $(X, \mathcal{O}(-K_X))$ は K 半安定である. 今 $(X, \mathcal{O}(-K_X))$ が K 安定ではないと仮定する. つまり, Donaldson-二木不変量が 0 になる半テスト配位 $(\mathcal{B}, \mathcal{L}_{(r)}(-E))$ が存在するとする. (7) の第 1, 2 項はともに非負であるから

$$((\overline{\mathcal{L}_{(r)}} - E)^n \cdot \overline{\mathcal{L}_{(r)}}) = 0$$

が成り立つ. 補題 3.3 より $\dim \text{Supp}(\mathcal{O}_{X \times \mathbb{A}^1}/J) = 0$ が成り立つ. つまり, \mathcal{B} は $X \times \mathbb{A}^1$ を中心ファイバー上の 0 次元の台を持つ部分概型 V_J に沿ったブローアップに限定される. これは非常に限られた状況と言える.

一方で, 微分幾何的視点から考えたとき, $\alpha(X) = \frac{n}{n+1}$ のときに起こりうる状況は (今のところ) 代数幾何的視点から考えたときのように限定されていない. 実際に $\alpha(X) = \frac{n}{n+1}$ のときに X が KE 計量を持つか否かはオープンな問題である⁸.

References

- [1] V.V. Batyrev and E.N. Selivanova, Einstein-Kähler metrics on symmetric toric Fano manifolds., J. Reine Angew. Math. 512 (1999) 225–236.
- [2] I. Cheltsov and C. Shramov, Log canonical thresholds of smooth Fano threefolds. (with an appendix by J. P. Demailly), Uspekhi Mat. Nauk, vol. 63 (2008) 73–180.
- [3] S.K. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric varieties, J. Differential Geom. 62, no.2 (2002) 289–349.
- [4] S.K. Donaldson, A note on the α -invariant of the Mukai-Umemura 3-fold., arXiv:0711.4357 (2007).
- [5] Y. Odaka, A generalization of the Ross-Thomas slope theory. Osaka J. Math. 50, no. 1 (2013) 171–185.
- [6] Y. Odaka and Y. Sano, Alpha invariant and K-stability of \mathbb{Q} -Fano varieties, Adv. Math. 229, no. 5 (2012) 2818–2834.
- [7] J. Ross and R.P. Thomas, An obstruction to the existence of constant scalar curvature Kähler metrics, J. Differential Geom. 72, no.3 (2006) 429–466.

⁸ K 半安定だが KE 計量を持たない例が存在する. cf. [9].

- [8] J. Ross and R.P. Thomas, A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties, *J. Algebraic Geom.* 16, no.2 (2007) 201–205.
- [9] G. Tian, On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$, *Invent. Math.* 89, no.2 (1987) 225–246.
- [10] G. Tian, Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature, *Invent. Math.* 130, no.1 (1997) 1–37.

混合フロベニウス構造と局所グロモフ・ウィッテン不変量

三鍋 聡司 (東京電機大学工学部)

1. INTRODUCTION

フロベニウス多様体とは、平坦な計量を持つ多様体であって、各点の接空間が可換な結合代数の構造を持ち、さらにその代数構造と平坦計量が様々な整合性の公理を満たすものである。これは2次元の位相的場の理論の族を記述する幾何構造として Dubrovin [2] によって定式化されたもので、代表的な例としては、

- (A) シンプレクティック多様体の量子コホモロジー ([2]),
- (B) カラビ・ヤウ多様体の複素構造の(拡大)モジュライ空間 ([1]),
- (LG) 孤立特異点の普遍開折の底空間 ([6]),

などがある。この3種類の例はいずれもミラー対称性の研究において重要であり、カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性は(A)型と(B)型のフロベニウス多様体の同型として、またファノ多様体のミラー対称性は(A)型と(LG)型のフロベニウス多様体の同型として定式化できる。詳しくは [7], 並びにそこに挙げられている文献を参照されたい。

本講演では、フロベニウス多様体の一般化である混合フロベニウス多様体について紹介する。これは [4] で導入されたもので、局所カラビ・ヤウ多様体と呼ばれる非コンパクトなカラビ・ヤウ多様体¹のミラー対称性(局所ミラー対称性)の定式化において自然に現れると期待される構造である。混合フロベニウス多様体は、各点の接空間が代数構造を持つという点ではフロベニウス多様体と同じだが、平坦計量が接空間全体では定義されず、各接空間に指定されたイデアルの飽和フィルターの逐次商(graded quotient)にのみ存在する点で、フロベニウス多様体とは異なるものである²。[4]の主結果は、局所カラビ・ヤウ多様体の量子コホモロジー上の混合フロベニウス構造の構成であったが、その後、カラビ・ヤウとは限らないより一般的な状況で、局所グロモフ・ウィッテン不変量を用いて混合フロベニウス構造が得られることが分かった [5]。講演では、これらの結果について説明したい。

用語と記号. 本稿では、代数と言えは \mathbb{C} 上有限次元で単位元を持つ可換で結合的な代数を指し、多様体は複素多様体を意味するものとする。多様体 M の正則接ベクトル束を TM と表し、 $x \in TM$ と書けば、 x は M のある開集合上の正則ベクトル場であるという意味である。正則ベクトル束の切断に対しても同様の記法を用いる。

2. 混合フロベニウス構造

2.1. **フロベニウス構造.** 代数 A と非退化対称双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ の組で、条件

$$\langle x \circ y, z \rangle = \langle x, y \circ z \rangle$$

¹典型例はファノ多様体の標準直線束の全空間である。

²フロベニウス構造を偏極ホッジ構造に喩えると、混合フロベニウス構造は偏極混合ホッジ構造に対応する。

を満たすものをフロベニウス代数と呼ぶ。ここで、 \circ は代数 A の積構造を表す。

定義 2.1 (Dubrovin). 多様体 M 上のフロベニウス構造とは、点 $t \in M$ に正則に依存する $T_t M$ 上のフロベニウス代数の構造 $(A_t, \langle, \rangle_t)$ と、オイラー場と呼ばれる M 上のベクトル場 E の組で、レビ・チビタ接続 ∇ が平坦であり、次の条件を満たすもののことである。

- (i) \langle, \rangle のレビ・チビタ接続 ∇ は平坦で、積に関する単位元 e は $\nabla e = 0$ を満たす。
- (ii) $c(x, y, z) := \langle x \circ y, z \rangle$ で定まる3階テンソル c の共変微分 ∇c は $\nabla_w c(x, y, z) = \nabla_z c(x, y, w)$ を満たす。
- (iii) オイラー場 E に対して $\nabla \nabla E = 0$ と次の2条件が成り立つ。

$$[E, x \circ y] - [E, x] \circ y - x \circ [E, y] = x \circ y,$$

$$E \langle x, y \rangle - \langle [E, x], y \rangle - \langle x, [E, y] \rangle = (2 - D) \langle x, y \rangle, \quad (x, y \in TM).$$

ここで、 $D \in \mathbb{C}$ はある定数で、これをフロベニウス構造のチャージという。

フロベニウス構造が与えられた多様体をフロベニウス多様体という。 X を非特異射影多様体 (より一般にコンパクト・シンプレクティック多様体でもよい) とし、そのコホモロジー $H^*(X, \mathbb{C})$ に X のグロモフ・ウィッテン不変量から定まる量子カップ積 \circ_t を入れた量子コホモロジー環 $QH^*(X)$ を考える。このとき、 $QH^*(X)$ と交差形式 $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X \alpha \cup \beta$ の組はフロベニウス代数である。さらに量子コホモロジー環 $QH^*(X) = M$ を多様体とみると、 M はチャージが $\dim_{\mathbb{C}} M$ のフロベニウス多様体となることが知られている。

2.2. 混合フロベニウス構造. 最初にフロベニウス代数の構造を次のように一般化する。

定義 2.2. (i) 代数 A のフロベニウス・イデアルとは、 A のイデアル I と非退化対称双線形形式 $(,) : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ の組で、条件

$$(x, a \circ y) = (a \circ x, y), \quad (x, y \in I, a \in A)$$

を満たすものである。

(ii) 代数 A 上のフロベニウス・フィルトレーションとは、 A のイデアルの飽和列

$$I_{\bullet} : 0 \subset \cdots \subset I_k \subset I_{k+1} \subset \cdots \subset A$$

と I_k/I_{k-1} 上の非退化対称双線形形式 $(,)_k$ の組で、全ての k について $(I_k/I_{k-1}, (,)_k)$ が A/I_{k-1} のフロベニウス・イデアルとなるものである。

定義 2.3. 多様体 M 上の混合フロベニウス構造とは、

- 振率ゼロで平坦なアフィン接続 ∇ ,
- オイラー場と呼ばれる $\nabla \nabla E = 0$ を満たす M 上のベクトル場 E ,
- 単位元 e が ∇ 平坦となるような $T_t M$ の積構造 \circ ,
- $T_t M$ の ∇ と $[E, *]$ に関して閉じた部分束によるフロベニウス・フィルトレーション,

の組で、次の条件を満たすものである。以下では、 $\pi_k : TM \rightarrow TM/I_{k-1}$ は射影、 \circ_k は TM/I_{k-1} に誘導される積、 $[E, *]_k$ と $\nabla^{(k)}$ はそれぞれ TM/I_{k-1} に $[E, *]$ と ∇ から誘導される導分と接続を表す。

$$(i) z(x, y)_k = (\nabla_z^{(k)} x, y)_k + (x, \nabla_z^{(k)} y)_k \quad (x, y \in I_k/I_{k-1}, z \in TM).$$

(ii) $c_k(x, y, z) := (x, \pi_k(z) \circ_k y)_k$ で定まるベクトル束の準同型 $c_k : I_k/I_{k-1} \otimes I_k/I_{k-1} \otimes TM \rightarrow \mathcal{O}_M$ は次を満たす:

$$(\nabla_w^{(k)} c_k)(x, y, z) = (\nabla_z^{(k)} c_k)(x, y, w) \quad (x, y \in I_k/I_{k-1}, z, w \in TM).$$

(iii) オイラー場 E に関して次の 2 式が成り立つ.

$$[E, x \circ_k \pi_k(z)]_k - x \circ_k \pi_k([E, z]) - [E, x]_k \circ_k \pi_k(z) = x \circ_k \pi_k(z),$$

$$E(x, y)_k - ([E, x]_k, y)_k - (x, [E, y]_k)_k = (2 - D_k)(x, y)_k, \quad (x, y, z \in I_k/I_{k-1}).$$

ここで, $D_k \in \mathbb{C}$ はある定数で, これをフィルター I_k のチャージという.

混合フロベニウス構造が与えられた多様体を混合フロベニウス多様体という.

2.3. 冪零商構成. 冪零元をもつフロベニウス多様体から, 混合フロベニウス多様体を構成することができる. まず代数のレベルでは, 冪零元をもつフロベニウス代数上に, フロベニウス・フィルトレーションが自然に定まる.

命題 2.4. $(A, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ をフロベニウス代数, $n \in A$ を冪零元とする.

(1) $k \geq 0$ に対し, $I_k := (n) + \text{Ker}(n^k \circ)$ とし, I_k/I_{k-1} 上の双線形形式を $(x, y)_k := \langle \tilde{x} \circ \tilde{y}, n^{k-1} \rangle$ と定めると, これらは A 上のフロベニウス・フィルトレーションとなる. ここで, (n) は n が生成する A のイデアル, \tilde{x}, \tilde{y} は $x, y \in I_k/I_{k-1}$ の $\text{Ker}(n^k \circ)$ への持ち上げである.

(2) このとき, $A/(n)$ 上にもフロベニウス・フィルトレーションが誘導される³.

これを一般化して, 多様体のレベルでは次が示せる.

定理 2.5. $(\circ, \langle \cdot, \cdot \rangle, E)$ を多様体 M 上のチャージ D のフロベニウス構造で, M 上の冪零ベクトル場 n が $[E, n] = 0$, $\nabla(n \circ *) = n \circ (\nabla *)$ を満たすとする. このとき n によって

- (1) M 上にフィルター I_k のチャージが $D+1-k$ の混合フロベニウス構造がひとつ定まる.
- (2) さらに, $TM' \oplus (n) = TM$ を満たす部分多様体 M' 上にも, M と同じチャージの混合フロベニウス構造が誘導される.

この混合フロベニウス構造の構成法を冪零商構成と呼ぶことにする.

3. 局所グロモフ・ウィッテン不変量を用いた混合フロベニウス構造の構成

3.1. 設定. X を複素 N 次元の非特異射影多様体, $\mathcal{L} \rightarrow X$ を条件

- (i) $c_1(\mathcal{L})^N \neq 0$,
- (ii) 任意の有効曲線 $C \subset X$ に対して, $\int_C c_1(\mathcal{L}) < 0$,

を満たす正則直線束とする. X のコホモロジーの偶数次部分を $H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$ とし, 基底を

$$(3.1) \quad \phi_0 = 1, \phi_1, \dots, \phi_J, \phi_{J+1}, \dots, \phi_K,$$

とする. ここで, ϕ_1, \dots, ϕ_J は $H^2(X, \mathbb{C})$ の基底である. これに付随した $H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$ の座標を t^0, \dots, t^K とする. また, 交差形式に関する上の基底の双対基底を ϕ_i^\vee ($0 \leq i \leq K$) と表す.

³ A がフロベニウス代数であったとしても, その商 $A/(n)$ はフロベニウス代数の構造を持つとは限らないことに注意.

3.2. **フィルトレーション.** $H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$ 上のフィルトレーション I_\bullet を次のように定義する.

$$(3.2) \quad \begin{aligned} I_k &= 0 \quad (k \leq 0), \\ I_1 &= \{\phi \cup c_1(\mathcal{L}) \mid \phi \in H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})\}, \\ I_k &= \{\phi \in H^{\text{even}}(X, \mathbb{C}) \mid c_1(\mathcal{L})^{k-1} \cup \phi = 0\} + I_1 \quad (k \geq 2). \end{aligned}$$

また, 逐次商 I_k/I_{k-1} 上の双線形形式 $(,)_k$ を次のように定義する:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} (c_1(\mathcal{L}) \cup \phi, c_1(\mathcal{L}) \cup \psi)_1 &= \int_X c_1(\mathcal{L}) \cup \phi \cup \psi, \\ ([\phi], [\psi])_k &= (-1)^{k-2} \int_X c_1(\mathcal{L})^{k-2} \cup \phi \cup \psi \quad (k \geq 2). \end{aligned}$$

補題 3.1. 上で定義した $(I_\bullet, (,)_\bullet)$ は, カップ積に関して $H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$ 上のフロベニウス・フィルトレーションである.

Proof. $V = \mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_X)$ を $\mathcal{L} \rightarrow X$ の全空間の射影コンパクト化とする. V の無限遠因子に対応するコホモロジー類を $n \in H^2(V, \mathbb{C})$ とすると, $H^{\text{even}}(V, \mathbb{C})/(n) = H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$. これに命題 2.4 の冪零商構成を適用すれば, 上で定義した $(I_\bullet, (,)_\bullet)$ が得られる. \square

3.3. **局所量子カップ積.** 直線束 $\mathcal{L} \rightarrow X$ の局所グロモフ・ウィッテン不変量を用いて, $H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$ 上に積を定義する. やや技術的な条件として, $\mathcal{L} \rightarrow X$ の全空間の射影コンパクト化 $V = \mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_X)$ の量子コホモロジーの積構造の構造定数が収束すると仮定する. この仮定は, 例えば $\mathcal{L} \rightarrow X$ が射影的なトーリック多様体上の同変直線束であれば満たされる ([3]).

$\overline{M}_{0,m}(X, \beta)$ を, 種数 0 の m 点付き曲線から X への, 次数 $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ の安定写像のモジュライ空間, $ev_i : \overline{M}_{0,m}(X, \beta) \rightarrow X$ を i 番目の標点での代入写像, $\mu : \overline{M}_{0,m+1}(X, \beta) \rightarrow \overline{M}_{0,m}(X, \beta)$ を忘却写像とする. このとき, $\mathcal{L} \rightarrow X$ の局所グロモフ・ウィッテン・ポテンシャルを

$$(3.4) \quad \Phi_{qu}(t) = \sum_{\substack{\beta \in H_2(X, \mathbb{Z}), \\ \beta \neq 0}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \int_{[\overline{M}_{0,m}(X, \beta)]^{\text{vir}}} \prod_{i=1}^m ev_i^* \mathbf{t} \cup e(R^1 \mu_* ev_{m+1}^* \mathcal{L}),$$

と定義する. ここで, $\mathbf{t} = \sum_{i=0}^K t^i \phi_i$ とおいた. これは, $\mathcal{L} \rightarrow X$ の局所グロモフ・ウィッテン不変量の生成関数である.

定義 3.2. $H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$ 上の積 \circ を

$$(3.5) \quad \phi_i \circ \phi_j = \phi_i \cup \phi_j + \sum_{k=0}^K \frac{\partial^3 \Phi_{qu}}{\partial t^i \partial t^j \partial t^k} c_1(\mathcal{L}) \cup \phi_k^\vee.$$

によって定義する. これを $\mathcal{L} \rightarrow X$ から定まる局所量子カップ積という.

補題 3.3. (3.2) および (3.3) で定義された $(I_\bullet, (,)_\bullet)$ は, 局所量子カップ積 \circ に関しても $H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$ 上のフロベニウス・フィルトレーションである.

Proof. 射影束 $V = \mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_X)$ の量子コホモロジー $QH^{\text{even}}(V, \mathbb{C})$ に対して, 補題 3.1 の証明と同様の冪零商構成を適用する. その際, V のグロモフ・ウィッテン不変量と $\mathcal{L} \rightarrow X$ の局所グロモフ・ウィッテン不変量の比較を行う. そこで $\mathcal{L} \rightarrow X$ に関する仮定 $\int_C c_1(\mathcal{L}) < 0$ が用いられる. 詳細は [5] を参照. \square

3.4. **主結果.** 以下, $M = H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$ を多様体とみなす. 標準的な同型

$$p: H^{\text{even}}(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} T_t M, \quad p(\phi_i) = \frac{\partial}{\partial t^i},$$

によって, 積 \circ (3.5), フィルトレーション I_\bullet (3.2), および双線形形式 $(\ , \)_\bullet$ (3.3) が $T_t M$ 上に誘導される. M 上のベクトル場 E を次のように定義する:

$$(3.6) \quad E = \sum_{i=0}^K \left(1 - \frac{\deg \phi_i}{2}\right) t^i \frac{\partial}{\partial t^i} + \sum_{i=1}^J \xi_i \frac{\partial}{\partial t^i}.$$

ここで, $\xi_i \in \mathbb{Z}$ は $c_1(\mathcal{L}) + c_1(X)$ を $H^2(X, \mathbb{C})$ の基底 ϕ_1, \dots, ϕ_J で表したときの ϕ_i の係数である:

$$(3.7) \quad c_1(\mathcal{L}) + c_1(X) = \sum_{i=1}^J \xi_i \phi_i.$$

このとき, 次が我々の主定理である.

定理 3.4 ([5]). d を TM の自明接続とすると, $(d, E, \circ, I_\bullet, (\ , \)_\bullet)$ は, $M = H^{\text{even}}(X, \mathbb{C})$ 上に, フィルター I_k のチャージが $D_k = N + 2 - k$ の混合フロベニウス構造を定める.

Proof. 射影束 $V = \mathbb{P}(\mathcal{L} \oplus \mathcal{O}_X)$ の量子コホモロジー $QH^{\text{even}}(V, \mathbb{C})$ 上のフロベニウス構造に対して, 定理 2.5 の冪零商構成を適用することによって得られる. \square

この定理で $c_1(X) + c_1(\mathcal{L}) = 0$ の場合が, 局所カラビ・ヤウ多様体の場合 ([4]) にあたる.

3.5. **付記: 積構造の半単純性について.** グロモフ・ウィッテン不変量から定まる量子カップ積が半単純か否かは重要な問題である⁴. 例えば, 複素射影空間の量子カップ積は半単純である. 一方, カラビ・ヤウ多様体の場合には, 量子カップ積は冪零元を持ち, 半単純ではない. この問題を局所グロモフ・ウィッテン不変量から定まる局所量子カップ積 (定義 3.2) について考えると, $c_1(X) + c_1(\mathcal{L}) \leq 0$ の場合, 局所量子カップ積は冪零元を持ち, 半単純ではないことが分かる. 一方, $c_1(X) + c_1(\mathcal{L}) > 0$ の場合には半単純となる例がある. 半単純な局所量子カップ積の構造を詳しく調べることは興味深い問題だと思われる.

REFERENCES

- [1] Barannikov, Sergey; Kontsevich, Maxim, *Frobenius manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields*, Internat. Math. Res. Notices 1998, no. 4, 201–215.
- [2] Dubrovin, Boris, *Geometry of 2D topological field theories*, in Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), 120–348, Lecture Notes in Math. **1620**, Springer, Berlin, 1996.
- [3] Iritani, Hiroshi, *Convergence of quantum cohomology by quantum Lefschetz*, J. Reine Angew. Math. **610** (2007), 29–69.
- [4] Konishi, Yukiko; Minabe, Satoshi, *Mixed Frobenius Structure and Local A-model*, preprint (2012), [arXiv:1209.5550 \[math.AG\]](https://arxiv.org/abs/1209.5550).
- [5] ———, *Mixed Frobenius Structure and Local Gromov–Witten invariants*, in preparation (2013).
- [6] Saito, Kyoji, *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **19** (1983), no. 3, 1231–1264.
- [7] 高橋篤史, 弦理論の代数的基礎 – 環・加群・圏から位相的弦理論, ミラー対称性へ –, サイエンス社 (2012).

E-mail address: minabe@mail.dendai.ac.jp

⁴積が半単純な量子コホモロジーは可積分系と関係が深い.

対数的末端特異点を持つ射影的カラビ・ヤウ多様体上の ケーラー・リッチフローについて

川村 昌也

首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻
E-mail: kawamura-masaya@ed.tmu.ac.jp

1 はじめに

本稿では、射影的カラビ・ヤウ多様体上のケーラー・リッチフローの持つ性質の考察結果を述べる。以下の結果が得られた。

定理 1 X を対数的末端特異点を持つ射影的カラビ・ヤウ多様体、 $\iota: X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を射影的埋め込みとする。 ω_{FS} を \mathbb{P}^N 上のフビニ・ストウディー計量とし、 ι による引き戻し $\iota^*\omega_{FS}$ が滑らかな点の集合を \tilde{X}_{reg} とする。このとき \tilde{X}_{reg} 上のケーラー・リッチフローはカラビ対称条件を保存しない。

注 1 標準因子 K_X がアンプル (Cao) またはネフかつ巨大 (Tian, Zhang) のときノーマライズされたケーラー・リッチフローはケーラー・アインシュタイン計量に収束するが、カラビ対称条件が保存されるとしても矛盾は起こらない。また K_X がネフでないときは有限の特異時間を持つのでこの場合も矛盾は起きない。従ってこの結果はカラビ・ヤウ多様体の構造に大きく起因するものと考えられる。

2 射影的カラビ・ヤウ多様体

X を正規、 \mathbb{Q} 分解的 n 次元射影的代数多様体で、その標準因子 K_X は数値的に自明とする。これらの条件を満たす X を射影的カラビ・ヤウ多様体と呼ぶ。 $\pi: X' \rightarrow X$ を特異点の解消とし、滑らかな双有理モデルである X' の標準因子を $K_{X'}$ と書く。 $\{E_i\}_{i=1, \dots, p}$ を π の例外因子の既約成分で単純正規交差であるとする。このとき $K_{X'} = \pi^*K_X + \sum_{i=1}^p a_i E_i$ を満たすような、 $\{a_i\}_{i=1, \dots, p} \subset \mathbb{Q}$ が一意的に定まる。 X が対数的末端特異点を持つとは、すべての i で $a_i > -1$ となることを言う。一般に、正規射影的代数多様体上のネフなカルティエ因子 D に対して $\nu(X, D) \geq \kappa(X, D)$ が成り立つ。標準因子 K_X がネフのとき、同様に $\nu \geq \kappa$ が成り立つが、曲面の場合あるいは、ある特別な条件の下以外の一般の場合においては $\nu = \kappa$ かどうかは分からない。これはアバダンス予想と呼ばれている。今、 K_X は数値的に自明としてあるので、 K_X はネフで特に $\nu = 0$ である。 $\nu = 0$ の場合のアバダンス予想は解決されているため $\nu = \kappa = 0$ となり、十分大きい正の整数 m に対し、必ず $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)^{\otimes m})$ から元 τ が取れる。各滑らかな点 $x \in X_{\text{reg}}$ の開近傍 U に対して $\mathcal{O}_X(K_X)^{\otimes m}|_U \cong (\Omega_X^n)^{\otimes m}|_U$ より $\tau = \varphi(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n)^m$ と書ける。ここで $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ 、 $\{z_1, \dots, z_n\}$ は U 上の局所座標系とする。この τ で体積要素を $\Omega = (\tau \wedge \bar{\tau})^{\frac{1}{m}}$ と定義すると、 X_{reg} 上で $Ric(\Omega) = -\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \Omega = 0$ となる。これをカラビ・ヤウ体積要素と呼ぶ。

3 カラビ対称条件

(X, \mathcal{O}_X) を局所環付き空間、 \mathcal{M} を \mathcal{O}_X 加群とする. 各開集合 $U \subset X$ に対し、 $\mathcal{M}(U)$ は $\mathcal{O}_X(U)$ 加群である. $T^p(\mathcal{M}(U)) \equiv \bigotimes^p \mathcal{M}(U)$ と定義し、そして $T(\mathcal{M}(U)) \equiv \bigoplus_p T^p(\mathcal{M}(U))$ とする. $\mathcal{M}(U)$ の対称代数 $S(\mathcal{M}(U)) = \bigoplus_{r \geq 0} S^r(\mathcal{M}(U))$ とは、全ての $v, w \in \mathcal{M}(U)$ に対して $v \otimes w - w \otimes v$ で生成される両側イデアルによる $T(\mathcal{M}(U))$ の商である. 前層 $U \mapsto S(\mathcal{M}(U))$ の層化を $S(\mathcal{M})$ と書き、 \mathcal{M} の対称代数と呼ぶ. 次に (X, \mathcal{O}_X) を代数的スキーム、 \mathcal{G} を X 上の階数 $n+1$ の局所自由層とする. このとき $S(\mathcal{G}) \equiv \bigoplus_{r \geq 0} S^r(\mathcal{G})$ は、 \mathcal{G} の対称代数である. またテンソル積により、各開集合について両立する環構造を持ち、 \mathcal{G} は局所自由層なので、これは次数付き \mathcal{O}_X 代数の層で斉次スペクトルが定義できる. 各 r について $S^r(\mathcal{G})$ は連接層で $S(\mathcal{G})$ は $S^0(\mathcal{G})$ 代数の層として有限個の r に対する $S^r(\mathcal{G})$ で生成されるので各アフィン開集合 $\{U_i\}_{i=1}^m$ に対して、 $\mathbb{P}(\mathcal{G})(U_i) \equiv \text{Proj}(S(\mathcal{G})(U_i))$ を貼り合わせができて \mathbb{P}^n 束 $\mathbb{P}(\mathcal{G})$ を定義する. $\mathcal{L} \equiv \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ は階数 2 の \mathbb{P}^N 上の局所自由層で $\pi_{\mathbb{P}^N} : \mathbb{P}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{P}^N$ は \mathbb{P}^1 束である. ここで $\mathbb{A}^{N+1} \setminus \{0\}$ 上の斉次座標 (x_1, \dots, x_{N+1}) を用いる. \mathbb{P}^N は $N+1$ 個のアフィン開集合 U_1, \dots, U_{N+1} で覆われ、各 U_i は $x_i \neq 0$ で特徴付けられる. 非斉次座標を U_i 上、 $z_{(i)}^j = \frac{x_j}{x_i}$ とし、各 U_i は $U_i = \text{Spec} \mathbb{C}[z_{(i)}^1, \dots, \widehat{z_{(i)}^i}, \dots, z_{(i)}^{N+1}] \cong \mathbb{A}^N$ で与えられる. 射影的正則座標 $\xi_{(i)} = [\xi_{(i)}^1 : \xi_{(i)}^2] \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ を、 $\pi_{\mathbb{P}^N}^{-1}(U_i \cap U_l)$ 上 $\xi_{(l)} = \frac{x_l}{x_i} \xi_{(i)}$ で与える. これにより二つの因子 $D_\infty \equiv \{\xi_{(i)} = \infty (= [0 : 1])\}$ と $D_0 \equiv \{\xi_{(i)} = 0 (= [1 : 0])\}$ が定義できる. $\mathbb{A}^{N+1} \setminus \{0\}$ の任意の (x_1, \dots, x_{N+1}) で $x_i \neq 0$ なる点は、点 $(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{N+1}}{x_i}, x_i) \in (\mathbb{P}(\mathcal{L}) \setminus (D_0 \cup D_\infty)) \cap \pi_{\mathbb{P}^N}^{-1}(U_i)$ と一対一の対応を持つ. 更に位相空間の包含写像 $\iota : \mathbb{C}^{N+1} \hookrightarrow \mathbb{A}^{N+1}$ を考えると、 $\mathbb{A}^{N+1} \supset U \mapsto \iota^{-1}(U) \subset \mathbb{C}^{N+1}$ は \mathbb{A}^{N+1} の開集合の族と \mathbb{C}^{N+1} の開集合の族の間の全単射を与えるので、 \mathbb{A}^{N+1} と \mathbb{C}^{N+1} の開集合を同一視する. このような対応と同一視の下で、 $\mathbb{P}(\mathcal{L}) \setminus (D_0 \cup D_\infty)$ は大域的に $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ によりパラメトライズされる. H_{N-1} を \mathbb{P}^N のカルティエ因子で、対応する可逆層 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(H_{N-1})$ が正則線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^N}(1)$ と同一視できるものとする. $D_H \equiv \pi_{\mathbb{P}^N}^*(H_{N-1})$ とすると、 $\pi_{\mathbb{P}^N}^* \mathcal{O}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^N}(1) \cong \pi_{\mathbb{P}^N}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(H_{N-1}) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(\pi_{\mathbb{P}^N}^*(H_{N-1})) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_H)$ であり、 $\pi_{\mathbb{P}^N}^* \omega_{FS} \in c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_H))$ と考えられる. この時、可逆層の第 1 チャーン類について $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_H)) = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_\infty)) - c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_0))$ が成り立つ. そして、類 $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_\infty))$ 、 $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_0))$ は $H^{1,1}(\mathbb{P}(\mathcal{L}); \mathbb{R})$ を張る. 任意のケーラー類 α は $b > a > 0$ に対し $\alpha = bc_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_\infty)) - ac_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_0))$ で与えられる.

滑らかな実正值閉 $(1, 1)$ 形式がカラビ対称条件を満たすとは、ユニタリー群 $U(N+1)$ の作用で不変なことである. ケーラー形式 $\omega_0 \in a_0 c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_H)) + (b_0 - a_0) c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_\infty))$ ($b_0 > a_0 > 0$) がこの条件を満たすように構成したい. まずフビニ・ストウディー計量は $U(N+1)$ で不変である. これに加えて $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$ 上の $U(N+1)$ で不変なケーラー計量を生成するポテンシャル関数 $u_0 = u_0(\rho) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 、($\rho \equiv \log((1 + |z_{(i)}|^2)|\xi_{(i)}|^2) \in (-\infty, \infty)$ 、 $|z_{(i)}|^2 = \sum_{j=1, j \neq i}^{N+1} |z_{(i)}^j|^2$) を $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ 全体に拡張したい. そのために次の条件 (1), (2) を与える.

- (1) $u'_0(\rho) > 0$, $u'_0(\rho) > 0$ for all $\rho \in (-\infty, \infty)$
- (2) 滑らかな関数 $U_{0,0}(e^\rho) = u_0(\rho)$ on $(-\infty, 0]$ with $U'_{0,0}(0) > 0$, $U_{0,\infty}(e^{-\rho}) = u_0(\rho) - (b_0 - a_0)\rho$ on $[0, \infty)$ with $U'_{0,\infty}(0) > 0$ が存在する.

ここで $h_{(i)} \equiv (1 + |z_{(i)}|^2)$, $\nabla \xi_{(i)} \equiv d\xi_{(i)} + h_{(i)}^{-1} \partial h_{(i)} \xi_{(i)}$ とする. このとき $\{dz_{(i)}^j, \nabla \xi_{(i)}\}$ は

$$\left\{ \nabla_{z_{(i)}^j} \equiv \frac{\partial}{\partial z_{(i)}^j} - h_{(i)}^{-1} \frac{\partial h_{(i)}}{\partial z_{(i)}^j} \xi_{(i)} \frac{\partial}{\partial \xi_{(i)}}, \frac{\partial}{\partial \xi_{(i)}} \right\}$$

の双対基底である [5]. $\partial \bar{\partial} \log |\xi_{(i)}|^2 = 0$ なので $\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \rho = \omega_{FS}$ となり、次のように計算できる.

$$\begin{aligned} \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u_0(\rho) &= u_0'(\rho) \omega_{FS} + \sqrt{-1} u_0''(\rho) \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho \\ &= u_0'(\rho) \omega_{FS} + \sqrt{-1} h_{(i)} e^{-\rho} u_0''(\rho) \nabla \xi_{(i)} \wedge \nabla \bar{\xi}_{(i)}. \end{aligned}$$

上の漸近条件により、 D_0 と D_∞ 上で次のように定義できて、 ω_0 は $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ 上のケーラー形式で $U(N+1)$ の作用で不変となる (これは Calabi ansatz と呼ばれる構成法である [1]).

$$\begin{aligned} \omega_0 &= a_0 \pi_{\mathbb{P}^N}^* \omega_{FS} + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u_0(\rho) \in a_0 c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_H)) + (b_0 - a_0) c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_\infty)) \\ &= (a_0 + u_0'(\rho)) \pi_{\mathbb{P}^N}^* \omega_{FS} + \sqrt{-1} h_{(i)} e^{-\rho} u_0''(\rho) \nabla \xi_{(i)} \wedge \nabla \bar{\xi}_{(i)} \\ &\rightarrow \begin{cases} b_0 \pi_{\mathbb{P}^N}^* \omega_{FS} & \text{as } \rho \rightarrow \infty \text{ (on } D_\infty) \\ a_0 \pi_{\mathbb{P}^N}^* \omega_{FS} & \text{as } \rho \rightarrow -\infty \text{ (on } D_0) \end{cases} \end{aligned}$$

X を対数的末端特異点を持つ n 次元射影的カラビ・ヤウ多様体とする. X には \mathbb{P}^N への射影的埋め込みがあるので、ここまでの内容を

$$\tilde{X}_{\text{reg}} \equiv \{x \in X \mid \text{開近傍 } U \text{ が存在して } \iota^* \omega_{FS} \text{ が } U \text{ 上滑らか}\}$$

に制限して考える.

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{P}^N}} \tilde{X}_{\text{reg}} \xrightarrow{\iota} \mathbb{P}^N.$$

\tilde{X}_{reg} の有限個の開被覆 $\{U_i\}_{i=1, \dots, n+1}$ を選び、先程と同様に非斉次座標 $\{(z_{(i)}^j)\}_{j=1, \dots, n+1, j \neq i}$ と射影的正則座標 $\xi_{(i)}$ を定義する. このとき同型 $\pi_{\mathbb{P}^N}^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{P}^1 \ni ((z_{(i)}^j), \xi_{(i)})$ を得る.

4 ケーラー・リッチフロウ

$\mathbb{P}(\mathcal{L})$ 上、Calabi ansatz により構成された ω_0 を初期条件としてケーラー・リッチフロウを考える.

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(t) = -\text{Ric}(\omega(t)), \quad \omega(0) = \omega_0.$$

この特異時間 $T > 0$ は $T \equiv \sup\{t > 0 \mid [\omega_0] - t c_1(\mathbb{P}(\mathcal{L})) > 0\}$ で与えられる. ここで $c_1(\mathbb{P}(\mathcal{L})) = N c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_H)) + 2 c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_\infty)) > 0$ より T は有限となる. $\mathbb{P}(\mathcal{L})$ は閉ケーラー多様体とみなせるので、 $[0, T) \times \mathbb{P}(\mathcal{L})$ 上で一意解が存在する [6]. このときケーラー・リッチフロウは $t \in [0, T)$ に対してカラビ対称条件を保存する. \tilde{X}_{reg} 上のケーラー形式 $\omega_{\tilde{X}_{\text{reg}}}$ をフビニ・ストゥディー計量の引き戻しの定数倍とすれば、 $[\omega_0] - T c_1(\mathbb{P}(\mathcal{L})) = [\pi_{\mathbb{P}^N}^* \omega_{\tilde{X}_{\text{reg}}}]$ を満たすので、このときフロウを走らせると $t \rightarrow T$ でファイバー \mathbb{P}^1 が点 $(\xi_{(i)})_0$ に潰れるこ

と分かる ($(N+2)a_0 > Nb_0$ とする)[2]. この極限計量 ω_T を初期計量として再度 \tilde{X}_{reg} 上で、ケーラー・リッチフローを走らせることができる. これは時間大域解となり、更に収束も考えられてカラビ・ヤウ計量 $\omega_{CY} \in [\omega_0]$ に収束することが確認できる [4]. もしカラビ対称条件が X 上のケーラー・リッチフローにより保存されるとすると、 $(\xi_{(i)})_0 = 0$ または ∞ の時は、再開したフローが自明なものとなるので $(\xi_{(i)})_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ としてよい. 仮定よりケーラー・リッチフローは引き続きカラビ対称条件を保存するので、条件 (1),(2) を満たすポテンシャル関数と $b_t > a_t > 0$ が各 t について存在して、 $U_i \times \{(\xi_{(i)})_0\}$ 上次のように計算できる.

$$\omega(t) = (a_t + u'_t(\rho))\pi_{\mathbb{P}^N}^* \iota^* \omega_{FS} + \sqrt{-1} \frac{1}{|(\xi_{(i)})_0|^2} u''_t(\rho) \nabla(\xi_{(i)})_0 \wedge \bar{\nabla}(\xi_{(i)})_0$$

ここで $\nabla(\xi_{(i)})_0 \equiv h_{(i)}^{-1} \partial h_{(i)}(\xi_{(i)})_0$ は先程と同様の基底とする. 従ってこの体積要素は

$$\omega(t)^n = (a_t + u'_t(\rho))^n (\pi_{\mathbb{P}^N}^* \iota^* \omega_{FS})^n$$

と計算できる. カラビ・ヤウ計量に収束するので、 $t \rightarrow \infty$ とすると \tilde{X}_{reg} 上 C^∞ の位相で

$$\text{Ric}(\omega(t)) = -\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log \omega(t)^n \rightarrow \text{Ric}(\omega_{CY}) = 0$$

となり、従って、

$$\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \log(a_t + u'_t(\rho)) \rightarrow 0$$

が得られて、 $\{(a_\infty + u'_\infty(\rho))u'''_\infty(\rho) - (u''_\infty(\rho))^2\} \sqrt{-1} \partial \rho \wedge \bar{\partial} \rho + (a_\infty + u'_\infty(\rho))u''_\infty(\rho) \iota^* \omega_{FS} = 0$ と計算できる. これは $u'_\infty(\rho) \equiv 0$ または $u''_\infty(\rho) \equiv 0$ のいずれかが成り立たなければならないことを意味するが、いずれの場合も $\omega(t)$ は $\iota^* \omega_{FS}$ の正の定数倍に収束することが分かり、これは \tilde{X}_{reg} 上でカラビ・ヤウ計量 ω_{CY} に一致する. つまり $\iota^* \omega_{FS}$ は X 上の特異カラビ・ヤウ計量であり、 \tilde{X}_{reg} 上 $\text{Ric}(\iota^* \omega_{FS}) = 0$ を満たすことになるが、もし埋め込みが滑らかであれば \tilde{X}_{reg} の次元は n であり次のように矛盾が導かれることが確かめられる.

5 J フロウ

Mabuchi-energy の proper 性と cscK 計量の存在は同値であるというティアンの予想の研究に用いられる J 汎関数のグラディエントフローである J フロウを走らせて矛盾を導く. J フロウは任意の滑らかな初期条件に対し、一意に時間大域解を持つ. 任意の \tilde{X}_{reg} 上の滑らかな実正值閉 (1,1) 形式 η で

$$c_n \equiv n \frac{\int_{\tilde{X}_{\text{reg}}} \eta \wedge \iota^* \omega_{FS}^{n-1}}{\int_{\tilde{X}_{\text{reg}}} \iota^* \omega_{FS}^n} = n \frac{[\eta] \cdot [\iota^* \omega_{FS}]^{n-1}}{[\iota^* \omega_{FS}]^n}$$

に対して $[c_n \iota^* \omega_{FS} - (n-1)\eta] > 0$ を満たすとすると、このとき \tilde{X}_{reg} 上滑らかな関数 $\phi_{n,0}$ で $\chi_{\phi_{n,0}} \equiv \iota^* \omega_{FS} + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi_{n,0} > 0$ を満たすものを初期条件とする J フロウ

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_{n,t} = c_n - n \frac{\eta \wedge \chi_{\phi_{n,t}}^{n-1}}{\chi_{\phi_{n,t}}^n}$$

は $t \in [0, \infty)$ に対して一意解を持ち、更に C^∞ 位相での収束が考えられて $\chi_{\phi_{n,\infty}} \equiv \iota^* \omega_{FS} + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} \phi_{n,\infty} \in [\iota^* \omega_{FS}]$ に収束する [3]. この $(1, 1)$ 形式 $\chi_{\phi_{n,\infty}}$ は

$$c_n \chi_{\phi_{n,\infty}}^n = n \eta \wedge \chi_{\phi_{n,\infty}}^{n-1}$$

を満たし、これは臨界方程式と呼ばれる. 先程と同様に \tilde{X}_{reg} 上の \mathbb{P}^1 束を考え、 $\omega_0 = a_0 \chi_{\phi_{n,\infty}} + \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} u_0(\rho) \in a_0 c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_H)) + (b_0 - a_0) c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(D_\infty))$ を初期条件として、カラビ対称条件を保存するケーラー・リッチフローを走らせることで、 $\chi_{\phi_{n,\infty}} = \iota^* \omega_{FS}$ であることが分かる. これより $\iota^* \omega_{FS}$ は臨界方程式を満たし、 $\text{tr}_{\iota^* \omega_{FS}}(\eta) = c_n$ が得られるので、 $0 = \Delta_{\iota^* \omega_{FS}} \text{tr}_{\iota^* \omega_{FS}}(\eta)$ を、ある点 $x_0 \in \tilde{X}_{\text{reg}}$ において $\iota^* \omega_{FS}$ に対して正則正規座標かつ η を対角化して、その対角成分は $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{>0}$ となるような x_0 を中心とする座標系 (z_1, \dots, z_n) で計算すると、 $\text{Ric}(\iota^* \omega_{FS}) = 0$ より

$$\begin{aligned} 0 = \Delta_{\iota^* \omega_{FS}} \text{tr}_{\iota^* \omega_{FS}}(\eta) &= \iota^* \omega_{FS}^{k\bar{l}} \nabla_k^{\iota^* \omega_{FS}} \bar{\nabla}_{\bar{l}}^{\iota^* \omega_{FS}} (\iota^* \omega_{FS}^{i\bar{j}} \eta_{i\bar{j}}) \\ &= -\text{Ric}(\iota^* \omega_{FS})^{i\bar{j}} \eta_{i\bar{j}} + \iota^* \omega_{FS}^{k\bar{l}} \iota^* \omega_{FS}^{i\bar{j}} \left(R_{i\bar{k}j\bar{l}}^{\bar{m}}(\eta) \eta_{i\bar{m}} + \Gamma(\eta)_{i\bar{j}}^{\bar{m}} \Gamma(\eta)_{k\bar{l}}^{\delta} \eta_{\delta\bar{m}} \right) \\ &= \delta^{kl} \delta^{i\bar{j}} R_{i\bar{k}j\bar{l}}(\eta) \\ &= R(\eta). \end{aligned}$$

ここで $R(\eta)$ は η のスカラー曲率. つまり条件 $[c_n \iota^* \omega_{FS} - (n-1)\eta] > 0$ (上の座標系で表すと任意に固定した $k (1 \leq k \leq n)$ に対し $1 > \sum_{i \neq k, i=1}^n \frac{\lambda_i}{c_n}$ となる) を満たす全てのケーラー形式 η に対してそのスカラー曲率は \tilde{X}_{reg} 上ゼロになるが、これは \tilde{X}_{reg} が平坦でないことに反する. 従って \tilde{X}_{reg} 上のケーラー・リッチフローはカラビ対称条件を保存しない.

参考文献

- [1] Calabi, E. *Extremal Kähler metrics*, in Seminar on Differential Geometry, pp. 259-290, Ann. of Math. Stud., **102**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1982.
- [2] Song, J., Székelyhidi, G. and Weinkove, B. *The Kähler-Ricci flow on projective bundles*, Int. Math. Res. Not. 2013 (2013), no. 2, 243-257.
- [3] Song, J., Weinkove, B. *On the convergence and singularities of the J-flow with applications to the Mabuchi energy*, Comm. Pure Appl. Math. **61** (2008), no. 2, 210-229.
- [4] Song, J., Yuan, Y. *Kähler-Ricci flow on Calabi-Yau manifolds*, ALM **21**, Advances in Geometric Analysis, 119-138.
- [5] Song, J., Yuan, Y. *Metric frips with Calabi ansatz*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), no. 1, 240-265.
- [6] Tian, G., Zhang, Z. *On the Kähler-Ricci flow on projective manifolds of general type*, Chinese Ann. Math. Ser. B **27** (2006), no. 2, 179-192.

非コンパクト対称空間への群作用を用いた 代数的リッチソリトンの研究*

武富雄一郎[†] (広島大学大学院理学研究科 D1)

概要

講演者は、代数的リッチソリトンと呼ばれるリー群上の特別な左不変計量を、ある種の非コンパクト対称空間への群作用の幾何を用いて研究している。本講演では、ある種の非コンパクト対称空間への余等質性 1 作用の様相と代数的リッチソリトンの存在・非存在性の対応を予想し、その予想を肯定する高次元の具体例を紹介する。本講演は広島大学の田丸博士先生との共同研究に基づく。

1 背景

代数的リッチソリトンは Lauret によって導入され [Lau 11], 広く研究されている。リー代数 \mathfrak{g} 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が 代数的リッチソリトン であるとは、ある $\lambda \in \mathbb{R}$ と微分 $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して $\langle \cdot, \cdot \rangle$ のリッチ作用素 $\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \in \text{End}(\mathfrak{g})$ が以下を満たすときをいう:

$$\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \lambda \cdot \text{id} + D. \quad (1)$$

リー代数上の代数的リッチソリトンは対応する単連結リー群上の左不変リッチソリトンを誘導する [Lau 11]. よって代数的リッチソリトンは、リッチソリトンの具体例を豊富に提供する。また、一般化された Alekseevskii 予想 [LL 12] によれば、リー代数が expanding (*i.e.* $\lambda < 0$) な代数的リッチソリトンを許容することは、以下のように代数構造に強い制約を与えることが予想される。

予想 1 ([LL 12]). リー代数 \mathfrak{g} が expanding な代数的リッチソリトンを許容するならば、 \mathfrak{g} は可解リー代数。

近年、代数的リッチソリトンが部分多様体の観点から研究されている。まず、 n 次元リー代数 \mathfrak{g} を一つ固定したとき、その上の内積全体の集合は非コンパクト対称空間 $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n)$ と同一視される。 $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n)$ には群 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ が自然に作用する。ここで、 $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ は以下で定義される:

$$\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) = \{c\varphi \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid c \in \mathbb{R}^\times, \varphi[\cdot, \cdot] = [\varphi \cdot, \varphi \cdot]\}. \quad (2)$$

このとき、 \mathfrak{g} 上の代数的リッチソリトン $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n)$ と任意の $g \in \mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ に対し、 $g \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle$ は再び代数的リッチソリトンになる。よって、代数的リッチソリトンは $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ -軌道の性質だと思える。Hashinaga-Tamaru は [HT] において以下の問題を考えている。

* 幾何学シンポジウム (於 東京工業大学, 2013/08/24-27) 講演予稿

[†] Email: y-taketomi@hiroshima-u.ac.jp

問題 2 ([HT]). 代数的リッチソリトンに対応する $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ -軌道は特別な部分多様体であるか？

これについて、以下のことが分かっている.

定理 3 ([HT]). \mathfrak{g} を 3次元可解リー代数, \langle, \rangle を \mathfrak{g} の内積とする. このとき以下は同値である:

- (1) \langle, \rangle は代数的リッチソリトン,
- (2) $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}) \cdot \langle, \rangle$ は (自然な $\text{GL}_3(\mathbb{R})$ -不変な計量に関して) $\text{GL}_3(\mathbb{R})/\text{O}(3)$ における極小部分多様体.

定理 3 は代数的リッチソリトンは特別な $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ -軌道で特徴付けられることを示唆する. しかし, このような代数的リッチソリトンと $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ -軌道の関係については, 低次元の場合にしか研究されておらず, 高次元の場合の研究が望まれる.

2 代数的リッチソリトンと余等質性 1 作用

我々は, 高次元の場合の中でも, まずは $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ -作用が余等質性 1 となる場合について研究している. (既約) 非コンパクト対称空間への余等質性 1 作用の理論は Berndt-Tamaru によって, ほぼ完成されている.

事実 4 ([BT]). G/K を既約非コンパクト対称空間, H を G の連結リー部分群とし, G/K への H -作用が余等質性 1 であるとする. このとき, H -作用は以下のいずれかを満たす:

- (K-type) 特異軌道がただ 1 つある (この特異軌道は極小になる),
- (A-type) 特異軌道がなく, 極小軌道がただ 1 つある,
- (N-type) 特異軌道がなく, 軌道がすべて合同になる.

$(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ を $\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ の単位元を含む連結成分とする. $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n)$ は既約ではないが, $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n)$ への余等質性 1 の $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用の様相は事実 4 と同じであることに注意する. 我々は, $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用が余等質性 1 の場合, 代数的リッチソリトンは以下のように $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用の性質で特徴付けられることを予想した. すなわち,

予想 5. \mathfrak{g} を n 次元リー代数, \langle, \rangle を \mathfrak{g} の内積, $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n)$ への $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用が余等質性 1 作用であるとする.

- (i) $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用が K-type のとき, \mathfrak{g} は代数的リッチソリトンを許容する. また, \langle, \rangle が代数的リッチソリトンであることと $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0 \cdot \langle, \rangle$ が特異軌道であることは同値,
- (ii) $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用が A-type のとき, \mathfrak{g} は代数的リッチソリトンを許容する. また, \langle, \rangle が代数的リッチソリトンであることと $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0 \cdot \langle, \rangle$ が極小軌道であることは同値,
- (iii) $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用が N-type のとき, \mathfrak{g} は代数的リッチソリトンを許容しない.

特に予想 5 の (iii) については, $(\mathbb{R}^\times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用が N-type ならば, すべての軌道が合同である

から, “特別な $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -軌道がない” と見做せる. よって (iii) は特別な $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -軌道がないならば, \mathfrak{g} は代数的リッチソリトンを許容しないことを予想しているものである.

現在知られている余等質性 1 の $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用の例はすべて予想 5 を肯定する.

事実 6. 予想 5 に関して以下のことが分かっている:

- (1) 3次元可解リー代数 \mathfrak{g} で $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用が K-type, A-type, N-type になるようなものがそれぞれ存在し [HT], 予想 5 を肯定する,
- (2) $n(\geq 4)$ 次元リー代数 \mathfrak{g} で $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用が K-type になるようなものが 2 つ存在し [KTT], 予想 5 を肯定する.

3 主結果

これまで, $\text{GL}_n(\mathbb{R})/O(n)$ への $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用が N-type となるようなケースについては高次元の具体例が知られていなかった. 我々は予想 5 の (iii) を肯定する高次元の例を構成することができた.

定理 7 ([TT]). $n \geq 3$ とする. n 次元リー代数 $\mathfrak{g}_{1,1}^n$ は以下を満たす:

- (1) $\text{GL}_n(\mathbb{R})/O(n)$ への $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}_{1,1}^n))_0$ -作用は余等質性 1 で N-type,
- (2) $\mathfrak{g}_{1,1}^n$ は代数的リッチソリトンをもたない.

ここで, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, $n(\geq 3)$ 次元リー代数 $\mathfrak{g}_{a,b}^n$ を以下で定義する:

$$\begin{cases} [e_1, e_n] = ae_1, \\ \vdots \\ [e_{n-2}, e_n] = ae_{n-2}, \\ [e_{n-1}, e_n] = be_1 + ae_{n-1}. \end{cases} \quad (\{e_1, \dots, e_n\} \text{ は } \mathfrak{g}_{a,b}^n \text{ の基底})$$

定理 7 は代数的リッチソリトンに対応する $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -軌道は特別な軌道であることを示唆する.

定理 7 における $\mathfrak{g}_{1,1}^n$ を構成するために, 以下のような考察を行なった. まず, 次のことが知られている:

事実 8 ([BT]). G/K を既約非コンパクト対称空間, H を G の連結リー部分群, $G = KAN$ を岩澤分解とする. G/K への H -作用が余等質性 1 で N-type 作用であるとき, ある N を含む連結リー群 N' が存在して, G/K への N' -作用と H -作用は軌道同値.

N を対角成分がすべて 1 の上三角行列全体からなる群とする. (すなわち, 岩澤分解 $\text{GL}_n(\mathbb{R}) = KAN$ における N である.) 事実 8 をふまえて, 我々は, $N \subset (\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ なる \mathfrak{g} から N-type の $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用の例を見付けることができると考えた. 我々は $N \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ となるリー代数の分類を行なった.

命題 9 ([TT]). \mathfrak{g} を $n(\geq 3)$ 次元リー代数とする. このとき, $N \subset \text{Aut}(\mathfrak{g})$ ならば, \mathfrak{g} は $\mathfrak{g}_{0,0}^n, \mathfrak{g}_{1,0}^n, \mathfrak{g}_{0,1}^n, \mathfrak{g}_{1,1}^n$ のいずれかと同型 ($\mathfrak{g}_{a,b}^n$ の定義は定理 7 を参照).

一方, $\mathfrak{g}_{0,0}^n, \mathfrak{g}_{1,0}^n, \mathfrak{g}_{0,1}^n$ については以下が知られている.

事実 10 ([Lau 03, KTT]). 以下の (1),(2) は同値:

- (1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{0,0}^n, \mathfrak{g}_{1,0}^n, \mathfrak{g}_{0,1}^n$,
- (2) $\text{GL}_n(\mathbb{R})/\text{O}(n)$ への $\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g})$ -作用は推移的.

よって, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{0,0}^n, \mathfrak{g}_{1,0}^n, \mathfrak{g}_{0,1}^n$ のとき $(\mathbb{R} \times \text{Aut}(\mathfrak{g}))_0$ -作用は N-type とならない. 残りの $\mathfrak{g}_{1,1}^n$ について上記の定理 7 を得た.

参考文献

- [BT] J. Berndt, H. Tamaru, Cohomogeneity one actions on symmetric spaces of noncompact type, *J. Reine Angew. Math.*, to appear.
- [HT] T. Hashinaga, H. Tamaru, Three-dimensional solvsolitons and the minimality of the corresponding submanifolds, preprint.
- [KTT] H. Kodama, A. Takahara, H. Tamaru, The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, *Manuscripta Math.* **135** (2011), no. 1–2, 229–243.
- [LL 12] R. Lafuente, J. Lauret, Structure of homogeneous Ricci solitons and the Alekseevskii conjecture, arXiv:1212.6511 (2012).
- [Lau 03] J. Lauret, Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups, *Differential Geom. Appl.* **18** (2003), 177–194.
- [Lau 11] J. Lauret, Ricci soliton solvmanifolds, *J. Reine Angew. Math.* **650** (2011), 1–21.
- [TT] Y. Taketomi, H. Tamaru, On the nonexistence of left-invariant Ricci solitons – a conjecture and examples, in preparation.

有限ケーリーグラフの多分割等周定数の間の普遍的不等式と、導かれる対称性

見村万佐人 (Masato MIMURA)
東北大・理

$G = (V, E)$ を有限正則グラフ (連結でなくてもよい) とするとき, 通常 (の辺) 等周定数 h_2 , 頂点等周定数 g_2 , ラプラス作用素の第 2 固有値 λ_2 はそれぞれ以下のように定義された. ここで $\deg G =: k$ とおく.

定義 1 (1) (等周定数)

$$h_2(G) = h(G) := \min_{1 \leq |A| \leq |V|/2} \frac{|\partial A|}{|A|}.$$

(2) (頂点等周定数)

$$g_2(G) = g(G) := \min_{1 \leq |A| \leq |V|/2} \frac{|\delta A|}{|A|}.$$

(3) (ラプラス作用素の第 2 固有値): $\Delta := kI - P$, P は隣接行列, は正規化されていない G のラプラス作用素であり, 第 1 固有値を $\lambda_1 := 0$ とおくときの第 2 固有値を $\lambda_2(G) = \lambda(G)$ とおく.

ここで, $A \subseteq V$ であり, ∂A は辺境界 (つまり, A と A^c をつなぐ辺の集合), δA は対称的な頂点境界 (つまり, ∂A の元となる辺の両方の頂点を集めてできる集合) である.

通常 (の記法) では上の $\lambda(G)$ は $\lambda_1(G)$ と表記されることに注意されたい.

これらの数量の間には以下のような関係がある. まず第一に, $h(G) = 0$, $g(G) = 0$, $\lambda(G) = 0$ はどれも同値で, G が連結でないことを意味する. より詳しくは, チェーゲー型の不等式と呼ばれるもので, Alon-V. Milman による有名な不等式

$$\frac{\lambda}{2} \leq h \leq \sqrt{2k\lambda}$$

および, Bobkov-Houdré-Tetali [1] による不等式

$$\lambda \geq \frac{(\sqrt{g+1} - 1)^2}{8}$$

が知られている.

一般に, グラフの次数を k とすると,

$$\frac{2}{k} h_2(G) \leq g_2(G) \leq 2h_2(G)$$

であるので、次数が一様有界な範囲を動くような列 $\{G_m\}_m$ に関しては h_2 と g_2 の挙動は（一様な定数倍で）同じである。しかし、本講演では次数が無限大に発散していくようなグラフの列も考える。この場合、 h_2 と g_2 の振る舞いは同様とは限らない。以下の h_n と g_n でも同様である。

上の定義で、 $\partial A = \partial A^c$ 、 $\delta A = \delta A^c$ であることに注意すると、次のような、これらの数量の一般化を考えられる。

定義 2 $2 \leq n \leq |V|$ とする。

(1) (n 分割等周定数)

$$h_n(G) := \min_{V=A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|\partial A_i|}{|A_i|}.$$

(2) (n 分割頂点等周定数)

$$g_n(G) := \min_{V=A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|\delta A_i|}{|A_i|}.$$

(3) (ラプラス作用素の第 n 固有値) : Δ の第 n 固有値を $\lambda_n(G)$ とおく。

ここで、 $V = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$ は V の空集合を許さない分割である。

h_n, g_n, λ_n の間にも、 $n = 2$ のときと同様の関係がある。まず、 $h_n(G) = 0$ 、 $g_n(G) = 0$ 、 $\lambda_n(G) = 0$ はどれも同値で、 G が少なくとも n 個の連結成分をもつことを意味する。さらに、高次のチーガー型の不等式として h_n と λ_n に対し、以下の関係が Lee–Gharan–Trevisan [2] によって示されている。

定理 3 ([2]) $k := \deg G$ とするとき、

$$\frac{\lambda_n(G)}{2} \leq h_n(G) \leq O(n^3) \sqrt{k \lambda_n(G)}.$$

彼らの議論を用いて、講演者は g_n と λ_n について以下の不等式を得た。

定理 4 ([3])

$$O(n^6) \lambda_n(G) \geq \left(\sqrt{\frac{g_n(G)}{n} + 1} - 1 \right)^2.$$

系 5 $n \geq 2$ を固定する。有限正則グラフの列 $\{G_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ で $\text{diam}(G_m) \rightarrow \infty$ となるものに対し、

$$\inf_n g_n(G_m) > 0 \implies \inf_m \lambda_n(G_m) > 0 \implies \inf_m h_n(G_m) > 0$$

が成り立つ。

G_m たちの次数が一様有界であれば逆も成立し、上の 3 条件は全て同値となる。

次数が一様有界ではない場合、どちらの逆も成立しない（ケーリーグラフの列でも反例が構成できる）。

λ_n の場合は自明であるが、 h_n , g_n も n について単調非減少であることが証明できる。では、

h_{n+1} (または、 g_{n+1}) は h_n (または、 g_n) と比べどれくらい大きくなりうるのか

ということが自然な問題となる。一般的には、以下のように、いくらでも大きくなりうる。

- $h_n(G) = 0$ かつ $h_{n+1}(G) > 0$ となることは、 G がちょうど n 個の連結成分をもつことと同値である。
- G の連結性を要請したとしても以下のような例が作れる： G_1, \dots, G_n をそれぞれで h (通常の等周定数) が十分大きいグラフとし、これらをあまり多くない辺で (正則かつ連結グラフになるように) 結んでできるグラフを G とする。 G の頂点集合を G_1, \dots, G_n の頂点集合に分割することで、 $h_n(G)$ はあまり大きくないことがわかる。一方、 $n+1$ 個の頂点集合に分割しようと思うと G_1, \dots, G_n の少なくとも 1 つの頂点集合を空でないように分割しないといけないため、 $h_{n+1}(G)$ は大きくなる。

田中守 [4] によって、連結グラフで h_n と h_{n+1} の間に大きなギャップがあるケースは定性的には上の二番目の例となっていることが示されている。

藤原耕二は、

上の問題に関して、 G が連結なケーリーグラフの場合には何か非自明な不等式はないか

という問題を提起した。本講演では、 h_n , g_n , λ_n に関して考えられるそれぞれの問題に対し、得ることができた不等式 ([3]) をお話したい。特に、上記の一番目の例のように、(連結でなくてもよい) 頂点推移的なグラフにおいて h_n と h_{n+1} の間にギャップがあるときに、群作用がある種の対称性をもつことを述べる。

参考文献

- [1] S. Bobkov, C. Houdré, and P. Tetali, λ_∞ , vertex isoperimetry and concentration, *Combinatorica* **20** (2) (2000), 153–172
- [2] J. R. Lee, Sh. O. Gharan, and L. Trevisan, Multi-way spectral partitioning and higher-order Cheeger inequalities, to appear in *STOC 2012*, arXiv:1111.1055.
- [3] M. Mimura, Multi-way isoperimetries, expanders, and finite Cayley graphs, in preparation
- [4] M. Tanaka, Multi-way expansion constants and partitions of a graph. Preprint, arXiv:1112.3434

Multi-way expansion constants and expander graphs

田中 守 (Mamoru Tanaka)* 東北大学 (Tohoku University)

1 多分割等周定数

グラフはループや多重辺を持たない無向グラフとする.

有限グラフ $G = (V, E)$ の等周定数 (または expansion constant) とは

$$h(G) := \min_{F \subset V} \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} : 1 \leq |F| \leq \frac{|V|}{2} \right\}$$

である. ここで ∂F は F と $V - F$ を結ぶ辺の集合を表す. この等周定数はグラフの連結性の強さを表している. Lee-Gharan-Trevisan [LGT12] は等周定数を $1 \leq k \leq |V|$ に対して

$$h_k(G) := \min \left\{ \max_{i=1,2,\dots,k} \frac{|\partial V^i|}{|V^i|} : V = \bigsqcup_{i=1}^k V^i (\text{直和}), V^i \neq \emptyset \right\}$$

と一般化した. これを G の k -分割等周定数と呼ぶ. k -分割等周定数は

$$0 = h_1(G) \leq h(G) = h_2(G) \leq h_3(G) \leq \dots \leq h_{|V|}(G)$$

を満たす. また各 $k \geq 1$ に対し「 $h_k(G) = 0$ かつ $h_{k+1}(G) > 0$ であること」と「 G の連結成分の個数が k であること」が同値である. さらに G のすべての連結成分からなる族を $\{G^i\}_{i=1}^k$ とすると

$$h_{k+1}(G) = \min_{i=1,2,\dots,k} h(G^i) \tag{1}$$

が成り立つ. ここではこのような G の分割に関する性質を考察する.

G の誘導部分グラフとは, $V_H \subset V$ かつ $E_H = \{xy \in E : x, y \in V_H\}$ を満たすグラフ $H = (V_H, E_H)$ である. G の k 分割とは, G の誘導部分グラフの族 $\{G^i = (V^i, E^i)\}_{i=1}^k$ で V^i らが互いに共通部分を持たないものである. G の任意の k 分割 $\{G^i\}_{i=1}^k$ に対して簡単に

$$h_{k+1}(G) \geq \min_{i=1,2,\dots,k} h(G^i)$$

が示せる. 一方で, 以下が成り立つ:

*mamoru.tanaka@wpi-aimr.tohoku.ac.jp

定理 1 ([Tan]). もし或る k に対して $h_{k+1}(G)/3^{k+1} > h_k(G)$ ならば, G の或る k 分割 $\{G^i = (V^i, E^i)\}_{i=1}^k$ が存在して

$$\frac{h_{k+1}(G)}{3^{k+1}} \leq \min_{i=1,2,\dots,k} h(G^i), \quad \max_{i=1,2,\dots,k} \frac{|\partial V^i|}{|V^i|} \leq 3^k h_k(G)$$

を満たす.

この定理は, $h_{k+1}(G)$ と $h_k(G)$ の間に大きなギャップがあると, グラフ G は比較的結びつきの強い k 個のグラフをそれぞれ比較的少ない辺で繋げたものであり, このとき G は (1) を弱めた評価を持つことを示している.

ラプラシアン固有値はグラフの重要な量であるが, 等周定数と関係が深い. ラプラシアン Δ_G は, V 上の実数値関数からなる集合 \mathbb{R}^V 上の作用素で $f \in \mathbb{R}^V$ と $x \in V$ に対して,

$$\Delta_G f(x) := f(x) \deg(x) - \sum_{xy \in E} f(y)$$

と定義される. ここで $x \in V$ の次数 $\deg(x)$ は, x を端点に持つ辺の数である.

Δ_G の固有値を小さい順に $\lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_{|V|}(G)$ と表す. ラプラシアンの固有値もグラフの連結性の強さを表すことが知られており, $\lambda_2(G)$ は G の代数的連結度と呼ばれている. 実際, $\lambda_k(G) = 0$ かつ $\lambda_{k+1}(G) > 0$ であること, G の連結成分の個数が k であることは同値である. さらに, G のすべての連結成分からなる族を $\{G^i\}_{i=1}^k$ とすると

$$\lambda_{k+1}(G) = \min_{i=1,2,\dots,k} \lambda_2(G^i) \quad (2)$$

が成り立つ. G の任意の k 分割 $\{G^i\}_{i=1}^k$ に対して, 多分割等周定数と同様に

$$\min_{i=1,2,\dots,k} \lambda_2(G^i) \leq \lambda_{k+1}(G)$$

を示すことができる. Lee-Gharan-Trevisan [LGT12] により次が示されている: 定数 $C > 0$ が存在して, 任意の連結グラフ G と任意の $k = 1, 2, \dots, |V|$ に対して

$$\frac{\lambda_k(G)}{2 \deg(G)} \leq h_k(G) \leq C k^2 \deg(G) \sqrt{\lambda_k(G)}. \quad (3)$$

ここで $\deg(G)$ は G の頂点の次数の最大値である. (ただし, 彼らは正規化されたラプラシアンの固有値と重み付き多分割等周定数に対してよりよい不等式を示しており, それには G の連結性は必要なく, 不等式中の $\deg(G)$ も必要ない.) この結果と定理 1 を用いると, $\lambda_{k+1}(G)$ と $\lambda_k(G)$ に大きなギャップがあると, G は (代数的連結度の意味で) 比較的結びつきの強い k 個のグラフをそれぞれ比較的少ない辺で繋げたものであり, このとき G は (2) を弱めた評価を持つことが分かる.

2 多分割エクスパンダー列

エクスパンダー列は計算理論, 群論, 幾何, トポロジーなどの分野で重要なグラフの列である (cf. [HLW06]). エクスパンダー列とは, 有限グラフの列 $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ で次の3つを満たすものである: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$; (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$; (iii) $\inf_{n \in \mathbb{N}} h(G_n) > 0$. 次のより一般の有限グラフの列 (多分割エクスパンダー列) $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ を考えるのは自然である: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} |V_n| = \infty$; (ii) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \deg(G_n) < \infty$; (iii)' 或る $k \geq 1$ に対して $\inf_{n \in \mathbb{N}} h_{k+1}(G_n) > 0$. 各グラフが連結な多分割エクスパンダー列の例は, エクスパンダー列を k 個用意して各 n 番目のグラフ同士を互いにすべて1本の辺で結ぶことで簡単に構成できる. 多分割エクスパンダー列は以下を満たす:

系 2 ([Tan]). $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ を多分割エクスパンダー列とする. このとき, その部分列 $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$ と各 G_m の誘導部分グラフで $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$ がエクスパンダー列となるものが存在する. さらに, もし G_n ($n = 1, 2, \dots$) がすべて連結ならば, 或る $k \in \mathbb{N}$ と, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{G_m\}_{m=1}^{\infty}$, 各 G_m の k 分割 $\{H_m^i\}_{i=1}^k$ が存在し, すべての $i = 1, 2, \dots, k$ に対して $\{H_m^i\}_{m=1}^{\infty}$ はエクスパンダー列である.

多分割等周定数はラプラシアン固有値による上下からの評価があるため, この系は船野-塩谷 [FS13] による Riemann 多様体に対する以下の結果の類似と見做すことができる: $k + 1$ 番目の固有値が無限大に発散する重み付き閉 Riemannian 多様体の列は, k 個の Lévy 族の和である.

3 粗埋め込み可能性

距離空間の列 $\{(X_n, d_{X_n})\}_{n=1}^{\infty}$ が距離空間 (Y, d_Y) に粗埋め込み可能とは, $[0, +\infty)$ 上の2つの或る非減少関数 ρ_1, ρ_2 と写像の列 $\{f_n : X_n \rightarrow Y\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して以下を満たすことである:

(i) 任意の $x, y \in X_n$ と n に対して

$$\rho_1(d_{X_n}(x, y)) \leq d_Y(f_n(x), f_n(y)) \leq \rho_2(d_{X_n}(x, y))$$

(ii) $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_1(r) = +\infty$.

特に距離空間 X に対して, すべての n で $X_n = X$ とした列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が距離空間 Y に粗埋め込み可能であるとき, X は Y に粗埋め込み可能という.

連結グラフ G の頂点集合 V 上の距離 d_G を各2頂点を結ぶ道の辺の数の最小値で定義することができるため, 連結グラフは距離空間と見做すことができる. Yuにより有限次数の無限グラフ G が Hilbert 空間に粗埋め込み可能なら

ば, G に対する粗 Baum-Connes 予想 (Atiyah-Singer の指数定理の K 理論類似) が正しいことを示した ([Yu00]). しかし, Gromov によりエクスペンダー列は, Hilbert 空間に粗埋め込み可能でないことが知られている ([Gro03]). つまり, エクスペンダー列を粗埋め込みできる有限次数無限グラフは, Yu の結果を用いた粗 Baum-Connes 予想の解決の障害となっている. 多分割エクスペンダー列に対し Hilbert 空間に粗埋め込み可能かどうか考察するため以下を示した.

補題 3 ([Tan]). 次数が一様に抑えられた有限グラフの列 $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, 各 G_n の或る誘導部分グラフ H_n からなる列 $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ がエクスペンダー列ならば, $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ は Hilbert 空間に粗埋め込み可能でない.

(グラフが距離空間として粗埋め込みできることと, 誘導部分グラフであることは異なることに注意.) よって次が示せた:

系 4. 多分割エクスペンダー列 (とそれらを粗埋め込みできる有限次数無限グラフ) も Hilbert 空間に粗埋め込み可能でない.

一般にこの逆は成り立たない. 例えば, エクスペンダー列 $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ を 1 つ取ってきて, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\{G_n\}_{n=1}^k$ の各グラフの組 G_i, G_{i+1} を 1 つの辺で繋げたもの ($i = 1, 2, \dots, k-1$) を k 番目のグラフとするグラフ列は, Hilbert 空間に粗埋め込み可能でないが, 任意の k 分割等周定数は 0 に収束する.

参考文献

- [FS13] Kei Funano and Takashi Shioya, *Concentration, Ricci Curvature, and Eigenvalues of Laplacian*, Geom. Funct. Anal. **23** (2013), no. 3, 888–936.
- [Gro03] M. Gromov, *Random walk in random groups*, Geom. Funct. Anal. **13** (2003), no. 1, 73–146.
- [HLW06] Shlomo Hoory, Nathan Linial, and Avi Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **43** (2006), no. 4, 439–561 (electronic).
- [LGT12] James R. Lee, Shayan Oveis Gharan, and Luca Trevisan, *Multi-way spectral partitioning and higher-order Cheeger inequalities*, ACM, New York, 2012.
- [Tan] Mamoru Tanaka, *Multi-way expansion constants and partitions of a graph*, preprint, arXiv:1112.3434.
- [Yu00] Guoliang Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), no. 1, 201–240.

Separation distance and observable diameter of pyramids

小澤 龍ノ介 * (東北大学大学院理学研究科数学専攻 D2)

1 序

本講演の内容は塩谷隆氏 (東北大学) との共同研究 [7] に基づく. Gromov は [4, Chapter 3 $\frac{1}{2}$] において測度集中の考え方を基に測度距離空間の同型類全体の集合 \mathcal{X} 上の距離である observable distance d_{conc} と測度距離空間の不変量を導入し, 測度距離空間の列の収束理論を展開した. その際に $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$ のコンパクト化の元が pyramid と呼ばれる \mathcal{X} の部分集合で表現できることを示した. 本講演では pyramid に対して測度距離空間の不変量を自然な形で拡張し, pyramid の列の収束と不変量の関係について紹介する.

2 2つの測度距離空間の間の距離

$X = (X, d_X, \mu_X)$ が **測度距離空間 (metric measure space, mm-space)** であるとは (X, d_X) が完備可分距離空間であり μ_X が (X, d_X) 上の Borel 確率測度となることをいう. 部分集合 $\text{supp}(\mu_X) \subset X$ を測度の台 (測度が 1 となる最小の閉集合) とし, $\text{Lip}_1(X)$ を X 上の 1-Lipschitz 関数全体の集合とする. 閉 Riemann 多様体は Riemann 体積測度を正規化することにより測度距離空間となる.

定義 2.1 (押し出し). $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$ を測度空間, (Y, \mathcal{B}_Y) を可測空間とし, $f : X \rightarrow Y$ を可測写像とする. $A \in \mathcal{B}_Y$ に対して, $\mu_Y(A) := \mu_X(f^{-1}(A))$ と定義すれば, $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ は測度空間となる. この μ_Y を μ_X の f による **押し出し** といい $f_*\mu_X$ とかく.

定義 2.2 (同型). 2つの測度距離空間 X と Y が **同型** であるとは等長写像 $f : \text{supp}(\mu_X) \rightarrow \text{supp}(\mu_Y)$ が存在し, $\mu_Y = f_*\mu_X$ となることをいう. \mathcal{X} を測度距離空間の同型類全体の集合とする.

定義 2.3 (Lipschitz order, [4]). $X, Y \in \mathcal{X}$ とする. ある 1-Lipschitz 写像 $f : X \rightarrow Y$ で $\mu_Y = f_*\mu_X$ となるものが存在するとき $Y \prec X$ とかく. 関係 \prec を **Lipschitz order** とよぶ.

\mathcal{L} を \mathbb{R} 上の通常の Lebesgue 測度とする.

定義 2.4 (パラメータ). Borel 可測写像 $p_X : [0, 1] \rightarrow X$ が X のパラメータであるとは, $\mu_X = (p_X)_*\mathcal{L}$ をみたすことをいう.

任意の測度距離空間に対してその完備性と可分性よりパラメータは一意的ではないが必ず存在することが知られている. 2つの測度距離空間の同型類の間の距離である box distance を定義する.

定義 2.5 (Box distance, [4]). $X, Y \in \mathcal{X}$ とする. このとき X と Y の間の **box distance** を

$$\square_1(X, Y) := \inf_{(p_X, p_Y)} \{ \varepsilon > 0 \mid \exists T_\varepsilon \subset [0, 1] : \text{Borel 集合}, \mathcal{L}(T_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \\ \text{s.t. } |d_X(p_X(s), p_X(s')) - d_Y(p_Y(s), p_Y(s'))| \leq \varepsilon, \forall s, s' \in T_\varepsilon \}$$

と定める. ここで写像 $p_X : [0, 1] \rightarrow X$, $p_Y : [0, 1] \rightarrow Y$ はそれぞれ X と Y のパラメータである.

* sb0m08@math.tohoku.ac.jp

定理 2.6 ([4]). (\mathcal{X}, \square_1) は完備可分距離空間である.

次に 2 つの測度距離空間の同型類の間の距離である observable distance を定義する.

定義 2.7. 2 つの Borel 可測関数 $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ に対してその間の距離 $\text{me}_{\mathcal{L}}(f, g)$ を

$$\text{me}_{\mathcal{L}}(f, g) := \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid \mathcal{L}(\{ t \in [0, 1] \mid |f(t) - g(t)| > \varepsilon \}) \leq \varepsilon \}$$

と定める.

定義 2.8 (Observable distance, [4]). $X, Y \in \mathcal{X}$ とする. X のパラメータ p_X に対して

$$p_X^* \mathcal{L}ip_1(X) := \{ f \circ p_X \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X) \}$$

と定める. このとき X と Y の間の **observable distance** を

$$d_{\text{conc}}(X, Y) := \inf_{(p_X, p_Y)} d_H^{\text{me}_{\mathcal{L}}} (p_X^* \mathcal{L}ip_1(X), p_Y^* \mathcal{L}ip_1(Y))$$

と定める. ここで $d_H^{\text{me}_{\mathcal{L}}}$ は $\text{me}_{\mathcal{L}}$ に関する Hausdorff 距離である.

定理 2.9 ([4]). $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$ は可分距離空間である.

Box distance と observable distance の間には次の不等式が成り立つ.

命題 2.10. $X, Y \in \mathcal{X}$ とする. このとき

$$d_{\text{conc}}(X, Y) \leq \square_1(X, Y)$$

が成り立つ.

$S^n(r)$ を半径 r の n 次元球面, $* := (\{p\}, \delta_p)$ を 1 点測度距離空間とする.

定理 2.11 ([2, 4–6]). $\{S^n(1)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\mathbb{C}P^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{SO(n)\}_{n=1}^{\infty}$ は observable distance の意味で $*$ に収束するが, box distance の意味で発散する.

Observable distance を考えることにより閉 Riemann 多様体の列でその次元は無限大に発散するが, 極限が有限次元であるものを見つけることができる.

3 測度距離空間の不変量

Gromov は [4] において測度距離空間の不変量である observable diameter と separation distance を定義した.

定義 3.1 (Observable diameter, [4]). $X \in \mathcal{X}$, $\kappa > 0$ とする. このとき X の **observable diameter** を

$$\text{ObsDiam}(X; -\kappa) := \sup_{f \in \mathcal{L}ip_1(X)} \inf \{ \text{diam}(A) \mid A \subset \mathbb{R} : \text{Borel 集合}, f_* \mu_X(A) \geq 1 - \kappa \}$$

と定める. ここで $\text{diam}(A)$ は A の直径である.

Observable diameter は observable distance の意味で X と 1 点空間の近さを計る量である.

命題 3.2. $X_n \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき $d_{\text{conc}}(*, X_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となることと, 任意の $\kappa > 0$ に対して $\text{ObsDiam}(X_n; -\kappa) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となることは同値である.

定義 3.3 (Separation distance, [4]). $X \in \mathcal{X}$, $N \in \mathbb{N}$, $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N > 0$ とする. このとき X の **separation distance** を

$$\text{Sep}(X; \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N) := \sup \{ \min_{i \neq j} d_X(A_i, A_j) \mid A_i \subset X : \text{Borel 集合}, \mu_X(A_i) \geq \kappa_i, i = 0, 1, \dots, N \}$$

と定める. Borel 集合の列 $\{A_i\}_{i=0}^N$ で $\mu_X(A_i) \geq \kappa_i$ となるものが存在しない場合は $\text{Sep}(X; \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N) := 0$ と定める.

Separation distance は observable distance の意味で X と N 点空間の近さを計る量である (定理 5.6 参照). $N = 1$ の場合は observable diameter と separation distance の間に次の関係が成り立つ.

命題 3.4. $X \in \mathcal{X}$, $0 < \kappa' < \kappa$ とする. このとき

$$\text{ObsDiam}(X; -2\kappa) \leq \text{Sep}(X; \kappa, \kappa) \leq \text{ObsDiam}(X; -\kappa')$$

が成り立つ.

また Lipschitz order に関して observable diameter と separation distance は単調性をもつ.

命題 3.5. $X, Y \in \mathcal{X}$ とする. このとき $Y \prec X$ ならば任意の $N \in \mathbb{N}$, $\kappa, \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N > 0$ に対して以下の (1) と (2) が成り立つ.

- (1) $\text{ObsDiam}(Y; -\kappa) \leq \text{ObsDiam}(X; -\kappa)$.
- (2) $\text{Sep}(Y; \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N) \leq \text{Sep}(X; \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N)$.

4 コンパクト化の元

定義 4.1 (Pyramid, [4, 8, 9]). 部分集合 $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ が次の (1), (2), (3) をみたすとき \mathcal{P} は **pyramid** であるという.

- (1) $X \in \mathcal{P}$, $Y \prec X$ ならば $Y \in \mathcal{P}$ である.
- (2) 任意の $X, X' \in \mathcal{P}$ に対しある $Z \in \mathcal{P}$ が存在し $X \prec Z, X' \prec Z$ となる.
- (3) \mathcal{P} は (\mathcal{X}, \square_1) 上の空ではない閉集合である.

Π を pyramid 全体の集合とする. $X \in \mathcal{X}$ に対し $\mathcal{P}_X := \{ Y \in \mathcal{X} \mid Y \prec X \}$ と定める.

$X \in \mathcal{X}$ に対して \mathcal{P}_X は pyramid となる. $\mathcal{P} \in \Pi$ と $t > 0$ に対して $t\mathcal{P} := \{ (X, td_X, \mu_X) \mid (X, d_X, \mu_X) \in \mathcal{P} \} \in \Pi$ となる. 包含関係に関して \mathcal{P}_* は極小な pyramid であり, \mathcal{X} は極大な pyramid である.

Pyramid の列の収束を定義する.

定義 4.2 (Weak Hausdorff convergence, [4]). $\mathcal{P}, \mathcal{P}_n \in \Pi$, $n \in \mathbb{N}$ とする. 次の (1) と (2) をみたすとき $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^\infty$ は \mathcal{P} に収束するといひ, $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}$ ($n \rightarrow \infty$) とかく.

- (1) 任意の $X \in \mathcal{P}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \square_1(X, \mathcal{P}_n) = 0$ が成り立つ.
- (2) 任意の $Y \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{P}$ に対して $\liminf_{n \rightarrow \infty} \square_1(Y, \mathcal{P}_n) > 0$ が成り立つ.

ここで $X \in \mathcal{X}$ に対して $\square_1(X, \emptyset) := +\infty$ とする.

定理 4.3 ([4, 8, 9]). $X, Y, X_n \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき以下が成り立つ.

- (1) $X_n \rightarrow X$ ($n \rightarrow \infty$) となることと, $\mathcal{P}_{X_n} \rightarrow \mathcal{P}_X$ ($n \rightarrow \infty$) となることは同値である.
- (2) Weak Hausdorff convergence に適合する Π 上の距離 ρ を構成することができ, (Π, ρ) はコンパクト距離空間となる. また $\rho(\mathcal{P}_X, \mathcal{P}_Y) \leq d_{\text{conc}}(X, Y)$ が成り立つように ρ を構成できる.
- (3) $\{\mathcal{P}_X\}_{X \in \mathcal{X}}$ は (Π, ρ) 上稠密である.

この定理は (Π, ρ) が $(\mathcal{X}, d_{\text{conc}})$ のコンパクト化となっていることを示している.

注意 4.4. Gromov による pyramid の元の定義には (3) の条件はない. この場合, (3) の条件を外した pyramid 全体の集合は weak Hausdorff convergence に関して Hausdorff ではないコンパクト化となる. しかし塩谷により (3) の条件を追加することで Π に weak Hausdorff convergence に適合したコンパクト距離空間の構造を入れることが出来ることが示された.

$S^n(1)$ のスケーリングを考えることにより $\Pi \setminus (\{\mathcal{P}_X\}_{X \in \mathcal{X}} \cup \{\mathcal{X}\})$ の元を得ることができる. $\|\cdot\|_2$ を l^2 ノルム, γ_n を \mathbb{R}^n 上の標準的な Gauss 測度とする.

定理 4.5 ([8,9]). $\{r_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ とする. このとき以下が成り立つ.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{\sqrt{n}} = 0$ となることと, $\mathcal{P}_{S^n(r_n)} \rightarrow \mathcal{P}_*$ ($n \rightarrow \infty$) となることは同値である.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{\sqrt{n}} = 1$ となることと, $\{\mathcal{P}_{S^n(r_n)}\}_{n=1}^\infty$ と $\{\mathcal{P}_{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)}\}_{n=1}^\infty$ が同じ pyramid に収束することは同値である.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{\sqrt{n}} = \infty$ となることと, 任意の収束部分列 $\{\mathcal{P}_{S^{n_i}(r_{n_i})}\}_{i=1}^\infty$ に対して $\mathcal{P}_{S^{n_i}(r_{n_i})} \rightarrow \mathcal{X}$ ($i \rightarrow \infty$) となることは同値である.

一方 Elek は [1] において **量子測度距離空間(quantum metric measure space, qmm-space)** を導入し, 量子測度距離空間の同型類全体の集合が $(\mathcal{X}_1, \sqsubseteq_1)$ のコンパクト化であることを示した. ここで

$$\mathcal{X}_1 := \{ X \in \mathcal{X} \mid \text{diam}(\text{supp}(\mu_X)) \leq 1 \}$$

とする. さらに Elek は observable diameter と separation distance を量子測度距離空間に対して定義し, 量子測度距離空間の列の収束と不変量の関係を調べた.

5 主結果

我々は pyramid の不変量として observable diameter と separation distance を定義し, pyramid の列の収束と不変量の関係を調べた.

定義 5.1. $\mathcal{P} \in \Pi$, $\kappa > 0$ とする. \mathcal{P} の **observable diameter** を

$$\text{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa) := \limsup_{\delta \searrow 0} \sup_{X \in \mathcal{P}} \text{ObsDiam}(X; -(\kappa + \delta)) \quad (\leq +\infty)$$

と定める.

定義 5.2. $\mathcal{P} \in \Pi$, $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N > 0$ とする. \mathcal{P} の **separation distance** を

$$\text{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N) := \limsup_{\delta \searrow 0} \sup_{X \in \mathcal{P}} \text{Sep}(X; \kappa_0 - \delta, \kappa_1 - \delta, \dots, \kappa_N - \delta) \quad (\leq +\infty)$$

と定める.

これらの定義が自然であることは observable diameter と separation distance の半連続性と命題 3.5 から従う.

定理 5.3. $\mathcal{P}, \mathcal{P}_n \in \Pi$, $n \in \mathbb{N}$ とする. $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}$ ($n \rightarrow \infty$) とすると任意の $\kappa > 0$ に対して

$$\text{ObsDiam}(\mathcal{P}; -\kappa) \leq \lim_{\delta \searrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{ObsDiam}(\mathcal{P}_n; -(\kappa + \delta))$$

が成り立つ.

命題 5.4. $\mathcal{P}_n \in \Pi$, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_*$ ($n \rightarrow \infty$) となることと, 任意の $\kappa > 0$ に対して $\text{ObsDiam}(\mathcal{P}_n; -\kappa) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となることは同値である.

定理 5.5. $\mathcal{P}, \mathcal{P}_n \in \Pi$, $n \in \mathbb{N}$ とする. $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}$ ($n \rightarrow \infty$) とすると任意の $N \in \mathbb{N}$, $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N > 0$ に対して

$$\text{Sep}(\mathcal{P}; \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N) \leq \lim_{\delta \searrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Sep}(\mathcal{P}_n; \kappa_0 - \delta, \kappa_1 - \delta, \dots, \kappa_N - \delta)$$

が成り立つ.

定理 5.6. $\mathcal{P}, \mathcal{P}_n \in \Pi$, $n, N \in \mathbb{N}$ とする. $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}$ ($n \rightarrow \infty$) とし, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $\kappa, \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N > 0$ に対して

$$\text{ObsDiam}(\mathcal{P}_n; -\kappa) < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sep}(\mathcal{P}_n; \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_N) = 0$$

が成り立つとする. このとき次の (1) または (2) が成り立つ.

- (1) $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_*$ ($n \rightarrow \infty$).
- (2) 部分列 $\{\mathcal{P}_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ と $\{t_i\}_{i=1}^\infty \subset (0, 1]$ が存在し $\{t_i \mathcal{P}_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ はある有限測度距離空間 Y で $2 \leq \#Y \leq N$ となるものが支配する pyramid \mathcal{P}_Y に収束する.

定理 5.6 は [3, Theorem 4.4] の一般化であり, その応用として Ricci 曲率が非負な閉 Riemann 多様体の Laplacian の第 1 固有値と第 N 固有値の間の次元に依存しない評価を得ることができる ([3, Theorem 1.1] 参照).

定義 5.7. $\{X_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$, $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ とする. ある $\{c_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ が存在し以下の (1) と (2) をみたすとき $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は **phase transition property** を持つという.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{c_n} = 0$ となることと, $\mathcal{P}_{t_n X_n} \rightarrow \mathcal{P}_*$ ($n \rightarrow \infty$) となることは同値である.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{c_n} = \infty$ となることと, 任意の収束部分列 $\{\mathcal{P}_{t_{n_i} X_{n_i}}\}_{i=1}^\infty$ に対して $\mathcal{P}_{t_{n_i} X_{n_i}} \rightarrow \mathcal{X}$ ($i \rightarrow \infty$) となることは同値である.

定理 4.5 から次の問題が提起される.

問題 5.8. $\{X_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$ とする. このとき $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ はいつ phase transition property をもつか.

定理 5.3 を応用することにより次が得られる.

定理 5.9. $\{X_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{X}$ とする. $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ が $\{c_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ に対して phase transition property をもつことと, 任意の $0 < \kappa < 1$ に対して

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{\text{ObsDiam}(X_n; -\kappa)}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{\text{ObsDiam}(X_n; -\kappa)} < \infty$$

をみたすことは同値である.

- 例 5.10.** (1) $\{S^n\}_{n=1}^\infty$ は $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^\infty$ に対して phase transition property をもつ (定理 4.5 参照).
(2) $\{CP^n\}_{n=1}^\infty$ は $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^\infty$ に対して phase transition property をもつ ([9] 参照).
(3) $\{SO(n)\}_{n=1}^\infty$ は $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^\infty$ に対して phase transition property をもつ.
(4) Hamming cube $\{0, 1\}^n$ に \mathbb{R}^n の通常の Euclid 距離を入れる. このとき $\{0, 1\}^n$ は $\{n^{1/4}\}_{n=1}^\infty$ に対して phase transition property をもつ ([4, Section 3 $_{\frac{1}{2}}$.42, 3 $_{\frac{1}{2}}$.62 (3)] 参照).

参考文献

- [1] G. Elek, *Samplings and observables. Invariants of metric measure spaces*, preprint.
- [2] K. Funano, *Estimates of Gromov's box distance*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 8, 2911–2920.
- [3] K. Funano and T. Shioya, *Concentration, Ricci Curvature, and Eigenvalues of Laplacian*, Geom. Funct. Anal. **23** (2013), no. 3, 888–936.
- [4] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhäuser Boston Inc., 1999.
- [5] M. Gromov and V. D. Milman, *A topological application of the isoperimetric inequality*, Amer. J. Math. **105** (1983), no. 4, 843–854.
- [6] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino*, Gauthier-Villars, Paris, 1951 (French). 2d ed.
- [7] R. Ozawa and T. Shioya, *Separation distance and observable diameter of pyramids*, in preparation.
- [8] T. Shioya, *Metric measure geometry -Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures-*, in preparation.
- [9] ———, *Metric measure limits of spheres and complex projective spaces*, in preparation.

EMBEDDED CONSTANT MEAN CURVATURE TORI IN THE THREE-SPHERE

HAIZHONG LI (TSINGHUA UNIVERSITY AND FUKUOKA UNIVERSITY)

1. BACKGROUNDS

Let $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a compact surface, with two principal curvatures k_1 and k_2 . Then the Gauss curvature and mean curvature are defined by

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Theorem 1 (Gauss-Bonnet Theorem). *Let M be a compact surface in \mathbb{R}^3 , then*

$$\int_M K dA = 2\pi\chi(M),$$

where $\chi(M)$ is the Euler characteristic of M , $\chi(M) = 2(1 - g)$, g is genus of M .

Theorem 2 (Liebmann Theorem, 1899). *Let M be a compact surface in \mathbb{R}^3 with $K = \text{constant}$, then M is a round sphere.*

In 1950s, by constructing a holomorphic quadratic differential for CMC surfaces in \mathbb{R}^3 , H. Hopf proved

Theorem 3 (Hopf Theorem). *Let M be a compact surface in \mathbb{R}^3 with $H = \text{constant}$ and $g(M) = 0$, then M is a round sphere.*

S. S. Chern [6] extended Hopf's result to CMC two-spheres in 3-dimensional space forms.

Hopf proposed in 1950s:

Conjecture 1 (Hopf Conjecture). *Any compact surfaces with $H = \text{constant}$ in \mathbb{R}^3 must be a round sphere.*

In 1956, Aleksandrov [1] checked Hopf's conjecture under extra condition "embeddedness".

Theorem 4 (Aleksandrov's uniqueness Theorem). *If a compact CMC surface is embedded in \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 or a hemisphere \mathbb{S}_+^3 , then it must be totally umbilical.*

In 1984, Wente [18] constructed counterexamples (non-trivial CMC tori) for Hopf's conjecture by use of integrable systems.

Wente's paper was followed by a series of papers by Bobenko, Kapouleas, Pinkall-Sterling and many others. In particular, they constructed many CMC tori in \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 and \mathbb{H}^3 .

2. WILLMORE CONJECTURE

In 1965, J. T. Willmore [19] proved

Theorem 5. *Let $x : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ be a compact surface with $g(M) = 0$, then we have $W(x) := \int_{\Sigma} H^2 dA \geq 4\pi$, and equality holds if and only if $x(M)$ is a round sphere.*

Remark 2.1. Above result without condition $g(M) = 0$ was known in old literature before Willmore's paper.

Theorem 6 (Anchor Tori). *Tori $T^2(a, b) : (\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 = a^2$, where $b > a > 0$, satisfies: $W(x) \geq 2\pi^2$, and equality holds if and only if $b = \sqrt{2}a$.*

Conjecture 2 (Willmore Conjecture, 1965). *Let T^2 be a topological tori (i.e., $g = 1$), $x : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a surface, then*

$$W(x) = \int_{x(T^2)} H^2 dA \geq 2\pi^2,$$

and equality holds if and only if $x(T^2)$ is conformal to $T^2(a, \sqrt{2}a)$.

Conjecture 3 (Willmore Conjecture). *Let $x : T^2 \hookrightarrow \mathbb{S}^3(1)$ be a compact surface with $g(T^2) = 1$, the mean curvature is H , then*

$$W(x) = \int_{x(T^2)} [H^2 + 1] dA \geq 2\pi^2,$$

and equality holds if and only if $x(T^2)$ is conformal to Clifford torus $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

In February 2012, Fernando Marques of IMPA in Brazil and Andre Neves of Imperial College London solved this conjecture. See their paper [13].

3. LAWSON CONJECTURE

In 1970, H. B. Lawson [12] conjectured that

Conjecture 4 (Lawson conjecture, 1970). *The only embedded minimal torus in \mathbb{S}^3 is the Clifford torus $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$.*

In March 2012, Simon Brendle in Stanford University solved this conjecture. See his paper [4].

4. PINKALL-STERLING CONJECTURE AND OUR THEOREM

In 1989, Pinkall and Sterling conjectured that

Conjecture 5 (Pinkall-Sterling conjecture, 1989). *All embedded CMC tori in \mathbb{S}^3 are surfaces of revolution.*

In April 2012, Ben Andrews and I confirm this conjecture. Moreover we gave a complete classification of such embedded tori. See our paper [3].

Theorem 7 (Main Theorem (Andrews-Li,2012)).

- (1) *Every embedded CMC torus Σ in \mathbb{S}^3 is a surface of rotation.*
- (2) *If $H \in \{0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ then every embedded torus with mean curvature H is congruent to the Clifford torus.*
- (3) *If Σ is an embedded CMC torus which is not congruent to a Clifford torus, then there exists a maximal integer $m \geq 2$ such that Σ has m -fold symmetry.*
- (4) *For given $m \geq 2$, there exists at most one such CMC torus (up to congruence).*
- (5) *For given $m \geq 2$, there exists an embedded CMC torus with mean curvature H and maximal symmetry $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_m$ if $|H|$ lies strictly between $\cot \frac{\pi}{m}$ and $\frac{m^2-2}{2\sqrt{m^2-1}}$.*

Remark 4.1.

- (1) The case $H = 0$ is the Lawson conjecture which was proved by Brendle. The rigidity appearing for $H = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ is unexpected.
- (2) For $H \neq \{0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ and is not Clifford torus, CMC embedded tori are the analogues of Delaunay Surface in R^3 . Number of these CMC embedded tori depends on the value of H .
- (3) The embeddedness assumption in Main Theorem is crucial: There exists an infinite family of non-rotationally symmetric immersed CMC tori in \mathbb{S}^3 .

5. OUTLINE OF THE PROOF OF THEROEM 7

To prove our theorem, we use the non-collapsing argument originating from [2], together with the modifications introduced by Brendle [4].

In 2011, Ben Andrews [2] gave a direct proof of the non-collapsing result (due to W. M. Sheng and X.J. Wang [17]) for mean-convex hypersurface in \mathbb{R}^{n+1} moving under the mean curvature flow:

Definition 1 (δ -non-collapsing). For $\delta > 0$, an embedded compact mean-convex hypersurface $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ is called δ -non-collapsing, if for every point x of M there is a sphere of radius $\delta/H(x)$ enclosed by M which touches M at x .

Theorem 8 (Non-collapsing result). *For any embedded compact mean-convex hypersurface $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ moving under the mean curvature flow, δ -non-collapsing is preserved if the initial embedded compact mean-convex hypersurface is δ -non-collapsing.*

Ben Andrews observed that the noncollapsing condition is equivalent to that $Z : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies

$$Z(x, y) = \frac{H(x)}{\delta} \|F(y) - F(x)\|^2 + \langle F(y) - F(x), \nu(x) \rangle \geq 0 \quad (5.1)$$

for $(x, y) \in M \times M$ and $\nu(x)$ is a unit outward normal vector of $F(x)$. This function was shown to admit a maximum principle argument to preserve initial non-negativity.

The idea of working with functions of pairs of points was in turn inspired by earlier work of Huisken and Hamilton for the curve shortening flow and for Ricci flow on surfaces. See [7, 8, 11].

The key geometric idea in the non-collapsing argument is to compare the curvature of enclosed balls touching the surface to a suitable function at the touching point.

Let $M^n = F(\Sigma^n)$ be an embedded hypersurface in $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ given by an embedding F , and bounding a region $\Omega \subset \mathbb{S}^{n+1}$.

The ball in \mathbb{S}^{n+1} with boundary curvature Φ which is tangent to $F(\Sigma)$ at the point $F(x)$ is $B = B_{\Phi^{-1}}(p)$, where $p = F(x) - \Phi^{-1}\nu(x)$, and ν is the unit normal to $F(\Sigma)$ at $F(x)$ in \mathbb{S}^{n+1} which points out of Ω .

The statement that this ball lies entirely in Ω is equivalent to the statement that for any $y \in \Sigma$, $\|F(y) - p\|^2 \geq \Phi^{-2}$, which can be written as follows:

$$\|F(y) - (F(x) - \Phi^{-1}\nu(x))\|^2 - \Phi^{-2} \geq 0.$$

This is equivalent to

$$Z(\Phi, x, y) := \frac{\Phi(x)}{2} \|F(y) - F(x)\|^2 + \langle F(y) - F(x), \nu(x) \rangle \geq 0. \quad (5.2)$$

Since $F(x), F(y) \in \mathbb{S}^{n+1}$ we have $\|F(x)\|^2 = \|F(y)\|^2 = 1$ and $\langle F(x), \nu(x) \rangle = 0$, so that

$$Z(\Phi, x, y) = \Phi(x)(1 - F(x) \cdot F(y)) + \langle F(y), \nu(x) \rangle. \quad (5.3)$$

We call the smallest $\Phi(x)$ for $Z(\Phi, x, y) \geq 0$ the interior ball curvature of the surface at x , and denote it by $\bar{\Phi}(x)$.

The case $H = 0$ was proved by Brendle [4], so we assume that $H > 0$. We denote by $\lambda(x) = \lambda_1(x)$ the largest principal curvature at x , and by $\mu(x) = \lambda(x) - H$.

The first step of the proof of the main theorem is that for an embedded CMC torus in \mathbb{S}^3 we always has $\bar{\Phi}(x) = \lambda(x)$. That is, we have for any $x \in \Sigma$ and $y \in \Sigma$

$$Z(\lambda, x, y) = \lambda(x)(1 - F(x) \cdot F(y)) + \langle F(y), \nu(x) \rangle \geq 0. \quad (5.4)$$

Now we choose

$$\Phi(x) = \kappa\mu(x) + H$$

where κ is a positive constant. We require the following Simons' identity:

Proposition 9. *Suppose that $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ is an embedded CMC torus in \mathbb{S}^3 . Then the function μ is strictly positive and satisfies*

$$\Delta\mu - \frac{|\nabla\mu|^2}{\mu} + 2(\mu^2 - 1 - H^2)\mu = 0.$$

Since Σ is compact and embedded, for sufficiently large κ , then $Z(\kappa\mu + H, x, y)$ is non-negative.

Along any geodesic $\gamma(s)$ in Σ through x we have

$$Z(\kappa\mu + H, x, \gamma(s)) = \frac{1}{2}(\kappa\mu + H - h_x(\gamma', \gamma'))s^2 + O(s^3).$$

Choose $\gamma'(0)$ to be in the direction of the largest principal curvature, so that $h_x(\gamma', \gamma') = \lambda = H + \mu$. Then

$$Z(\kappa\mu + H, x, \gamma(s)) = \frac{1}{2}(\kappa - 1)\mu s^2 + O(s^3)$$

If $\kappa < 1$, Z takes negative values for small s .

If $\kappa > 1$, Z is positive in a neighbourhood of the diagonal $\{(x, x) : x \in \Sigma\}$ in $\Sigma \times \Sigma$.

We choose

$$\bar{\kappa} = \inf\{\kappa > 0 : Z(\kappa\mu + H, x, y) \geq 0 \text{ for all } x, y \in \Sigma\}$$

Then $1 \leq \bar{\kappa} < \infty$. If $\bar{\kappa} > 1$, then there must exist (\bar{x}, \bar{y}) in $\Sigma \times \Sigma$ with $\bar{x} \neq \bar{y}$ such that $Z(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, while $Z(x, y) \geq 0$ for every $(x, y) \in \Sigma \times \Sigma$. Here we write $Z(x, y) = Z(\bar{\kappa}\mu + H, x, y)$.

Then the second derivatives of Z are non-negative at (\bar{x}, \bar{y}) . However, by a delicate calculation and using Proposition 9, we have in normal coordinates of \bar{x} and \bar{y}

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^2 \Big|_{(\bar{x}, \bar{y})} Z \leq -(\bar{\kappa}^2 - 1)d^2\mu^2 H < 0, \quad (5.5)$$

which is a contradiction. So we conclude that $\bar{\kappa} = 1$ and $\bar{\Phi}(x) = \lambda(x)$, that is, for any $x \in \Sigma$ and $y \in \Sigma$

$$Z(\lambda, x, y) = \lambda(x)(1 - F(x) \cdot F(y)) + \langle F(y), \nu(x) \rangle \geq 0. \quad (5.6)$$

The second step of the proof is to prove the following Proposition:

Proposition 10. *Let $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ be a CMC embedding for which $Z(\lambda(x), x, y) \geq 0$ for every $x, y \in \Sigma$ (equivalently, $\bar{\Phi}(x) = \lambda(x)$ everywhere). Then Σ is rotationally symmetric.*

Since Σ is a CMC torus and therefore has no umbilical points, we have global smooth eigenvector fields e_1 and e_2 such that $h(e_1, e_1) = \lambda_1 = \lambda$ and $h(e_2, e_2) = \lambda_2 = 2H - \lambda$, and $h(e_1, e_2) = 0$. We can deduce that $(\nabla_{e_1} h)(e_1, e_1) = 0$, and consequently also $(\nabla_{e_1} h)(e_2, e_2) = 0$ everywhere on Σ . So that $e_1 \lambda = 0$ and then $e_1 \mu = 0$.

Remark 5.1. If $H = 0$, we also have $(\nabla_{e_2} h)(e_2, e_2) = 0$ by changing e_1 with e_2 , $\nu(x)$ into $-\nu(x)$, we have that h is parallel, so $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

From the Codazzi equations and $H = \text{constant}$, we have

$$\nabla_{e_1} e_1 = \frac{e_2(\mu)}{2\mu} e_2, \quad \nabla_{e_2} e_1 = 0. \quad (5.7)$$

$$\nabla_{e_2} e_2 = 0, \quad \nabla_{e_1} e_2 = -\frac{e_2(\mu)}{2\mu} e_1. \quad (5.8)$$

It follows from (5.8) that the flow lines of e_2 are geodesic in Σ .

Writing

$$w = \mu^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.9)$$

From the Gauss equation, we get

$$\frac{1}{w} e_2(e_2(w)) - \frac{1}{w^4} + H^2 + 1 = 0. \quad (5.10)$$

Multiplying (5.10) by $2we_2(w)$, we obtain

$$[e_2(w)]^2 + w^{-2} + (1 + H^2)w^2 = C_1, \quad (5.11)$$

where C_1 is a constant.

Let us fix a point $x_0 \in M$, and denote by $\sigma(u)$ the geodesic in Σ such that $\sigma(0) = x_0$ and $\sigma'(0) = e_2(x_0)$. We write $g(u) = w(\sigma(u))$. Equation (5.11) implies that

$$(g')^2 + g^{-2} + (1 + H^2)g^2 + 2H = C \quad (5.12)$$

where C is a constant greater than $2(H + \sqrt{1 + H^2})$ and $C = C_1 + 2H$. The polynomial

$$\xi(s) = Cs^2 - 1 - (1 + H^2)s^4 - 2Hs^2 \quad (5.13)$$

is positive on an interval (t_1, t_2) with $0 < t_1 < t_2$ and $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$.

The roots can be explicitly calculated:

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt{\frac{C - 2H - \sqrt{C^2 - 4HC - 4}}{2(1 + H^2)}}, \\ t_2 &= \sqrt{\frac{C - 2H + \sqrt{C^2 - 4HC - 4}}{2(1 + H^2)}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

We have that g is a periodic function with period

$$T = 2 \int_{t_1}^{t_2} \frac{t}{\sqrt{(C - 2H)t^2 - 1 - (1 + H^2)t^4}} dt.$$

We can solve $g(u)$ from (24)

$$g(u) = \sqrt{\frac{C - 2H + \sqrt{C^2 - 4 - 4HC} \sin(2\sqrt{1 + H^2}u)}{2(1 + H^2)}}.$$

From the expression of $g(u)$, we get that its period $T = \frac{\pi}{\sqrt{1 + H^2}}$.

Lemma 11. *The vector fields e_2 and $\frac{e_1}{\sqrt{\mu}}$ commute.*

Lemma 12. *The plane Π^\perp generated by the vectors e_1 and $\bar{\nabla}_{e_1} e_1$ is constant on Σ .*

We parametrize Σ by two parameters s and u so that $(0, 0)$ corresponds to the point $x_0 \in \Sigma$, $\frac{\partial x}{\partial u} = E_2 = e_2$, and $\frac{\partial x}{\partial s} = E_1 = \frac{e_1}{\sqrt{\mu}}$.

Through delicate analysis, we can solve

$$F(u, v) = (r(u) \cos v, r(u) \sin v, \sqrt{1 - r^2(u)} \cos \theta(u), \sqrt{1 - r^2(u)} \sin \theta(u)) \quad (5.15)$$

where $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq u < \frac{m\pi}{\sqrt{1+H^2}}$ and m is some positive integer, where

$$\theta(u) = \int_0^u \frac{r(\tau)(\mu(\tau) + H)}{1 - r^2(u)} d\tau$$

$$r(u) = \frac{\mu^{-1/2}}{\sqrt{C}} = \sqrt{\frac{C - 2H + \sqrt{C^2 - 4 - 4HC\sin(2\sqrt{1+H^2}u)}}{2(1+H^2)C}}.$$

where C is the constant in (5.12). Note that g, r only depends on u , since $e_1(\mu) = 0$. This completes the proof of Proposition 10.

The third step of the proof is proving that the period function $K(H, C)$ is monotone in C , where

$$K(H, C) = \int_{\frac{t_1^2}{C}}^{\frac{t_2^2}{C}} \frac{(Hu + C^{-1})}{\sqrt{u(1-u)}\sqrt{-u^2(1+H^2) + (1-2HC^{-1})u - C^{-2}}} du,$$

where C is a constant greater than $2(H + \sqrt{1+H^2})$ and t_1 and t_2 are defined by (5.14).

The following result due to Otsuki and Perdomo:

Proposition 13. *Suppose that $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^3$ is a rotational torus in \mathbb{S}^3 , which is not a Clifford torus and is given by (5.15) Then $F(\Sigma)$ is an embedded torus if and only if*

$$K(H, C) = \frac{2\pi}{m} \quad (5.16)$$

for some positive integer m .

The following result is due to Perdomo [15]

Proposition 14. *If $H \neq 0, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, there exist compact embedded tori in \mathbb{S}^3 with constant mean curvature H , which are not Clifford tori. In fact, for any integer $m \geq 2$, if H satisfies*

$$\cot \frac{\pi}{m} < H < \frac{m^2 - 2}{2\sqrt{m^2 - 1}}, \quad (5.17)$$

then there exists a compact embedded torus in \mathbb{S}^3 with constant mean curvature H whose isometry group contains $O(2) \times \mathbb{Z}_m$ which is not a Clifford torus.

We can prove the following result

Proposition 15. *For any nonnegative real number H , $K(H, C)$ is monotone decreasing in $2(H + \sqrt{1+H^2}) < C < \infty$.*

When $H = 0$, proposition 15 was proved by T. Otsuki [14] in 1993.

By Proposition 10, every embedded CMC torus is a surface of rotation, and the other statements can be checked (see our paper in details). So we can complete the proof of Main Theorem.

If $H = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, we can assume $H = \frac{1}{\sqrt{3}}$ by reversing the unit normal vector if necessary. In this case $K(\frac{1}{\sqrt{3}}, C)$ takes values for $2\sqrt{3} < C < \infty$ in the range

$$\frac{2}{3}\pi < K(\frac{1}{\sqrt{3}}, C) < \pi, \quad (5.18)$$

thus there exists no integer $m \geq 2$ such that $K(\frac{1}{\sqrt{3}}, C) = \frac{2\pi}{m}$, and consequently there are no compact embedded torus in \mathbb{S}^3 with $H = \frac{1}{\sqrt{3}}$, other than the Clifford torus.

For all other values of H there exists some m such that equation (5.16) holds for some C , and consequently there always exist embedded CMC tori which are not congruent to Clifford tori. The number of these (up to congruence) is precisely the number of values of m for which (5.17) holds.

This completes the proof of the main theorem.

6. RELATED PROBLEMS AND REFERENCES

Problem 1. *What are analogues of Lawson conjectures and Pinkall-Sterling Conjectures for higher dimensional hypersurfaces in \mathbb{S}^{n+1} ?*

Theorem 16 (Otsuki, 1970s). *Let $x : M \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ be an n -dimensional embedded minimal hypersurface of revolution, then $M = \mathbb{S}^n$ or $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$.*

Remark 6.1. Andrews-Huang-Li have given a new proof of above Theorem by non-collapsing arguments. We note that there are many embedded minimal isoparametric hypersurfaces.

Problem 2. *How about some embedded Weingarten surfaces in \mathbb{S}^3 ? See Brendle's paper [5].*

Problem 3. *Classify embedded minimal Lagrangian tori in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ and $\mathbb{C}\mathbb{H}^2$, respectively.*

Problem 4. *Classify embedded CMC tori in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.*

Problem 5. *Classify embedded CMC tori in 3-dimensional Berger sphere \mathbb{S}_b^3 .*

LITERATUR

- [1] A. D. Aleksandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large. I*, Vestnik Leningrad. Univ. in Russian, **11**(1956), no.19, 5-17.
- [2] Ben Andrews, *Non-collapsing in mean-convex mean curvature flow*, Geometry Topology **16** (2012), 1413-1418.
- [3] Ben Andrews and Haizhong Li, *Embedded constant mean curvature tori in the three-sphere*. arXiv: 1204.5007
- [4] Simon Brendle, *Embedded minimal tori in \mathbb{S}^3 and the Lawson conjecture*. arXiv: 1203.6596, to appear in Acta Math.
- [5] Simon Brendle, *A note on Weingarten surfaces in \mathbb{S}^3* , arXiv:1305.2881
- [6] Shiing Shen Chern, *On surfaces of constant mean curvature in a three-dimensional space of constant curvature*, Lecture Notes in Math.,1007, Springer, 1983, 104-108.
- [7] Richard S. Hamilton, *Isoperimetric estimates for the curve shrinking flow in the plane*, Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992),Ann. of Math. Stud., vol. 137,Princeton Univ. Press,Princeton, NJ, 1995, pp. 201-222.
- [8] Richard S. Hamilton, *An isoperimetric estimate for the Ricci flow on the two-sphere*, Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992),Ann. of Math. Stud., vol. 137,Princeton Univ. Press,Princeton, NJ, 1995, pp. 191-202.
- [9] Heinz Hopf, *Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen*, Math. Nachr., **4**(1951), 232-249
- [10] Heinz Hopf, *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics, vo. 1000, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [11] Gerhard Huisken, *A distance comparison principle for evolving curves*, Asian J. Math.,**2**(1998), no.1, 127-133.
- [12] H.B. Lawson, Jr., *The unknottedness of minimal embeddings*, Invent. Math., **11** (1970), 183-187.
- [13] Fernando Marques, and Andre Neves, *Min-max theory and the Willmore conjecture*, arXiv: 1202.6306, to appear in Ann. of Math.
- [14] Tominosuke Otsuki, *On a differential equation related with differential geometry*,Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, **47**(1993), no.2, 245-281.
- [15] Oscar M. Perdomo, *Embedded constant mean curvature hypersurfaces on spheres*, Asian J. Math., **14**(2010), no.1,73-108.
- [16] U. Pinkall and I. Sterling, *On the classification of constant mean curvature tori*, Ann. of Math. (2), **130**(1989),no.2,407-451.
- [17] Weimin Sheng and Xu-Jia Wang, *Singularity profile in the mean curvature flow*, Methods Appl. Anal., **16**(2009), no.2,139-155.
- [18] Henry C. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math., **121**(1986), no.1,193-243.
- [19] T.J. Willmore, *Note on embedded surfaces*, Ann.Stiint. Univ. "Al.I.Cuza",Iasi.Ia.Mat., 1965,493-496.

フィンスラー多様体の旗曲率と位相の関係 (角度の観点から)¹

近藤 慶²

1 原点

大域リーマン幾何学、すなわちリーマン多様体の曲率と位相の関係を研究する際、現在も測地線論の立場から応用され続けている強力な定理は、トポノゴフの比較定理(TCT)である。簡単のために、 X を非負曲率非コンパクト完備リーマン多様体とする。 X 上に勝手な測地三角形 $\Delta(xyz)$ を描いたとき、 $\Delta(xyz)$ に対応する辺の長さが等しい測地三角形 $\tilde{\Delta}(\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z})$ を \mathbb{R}^2 上にも描く事が出来、かつ $\Delta(xyz)$ の各頂点 x, y, z における各内角 $\angle x, \angle y, \angle z$ が $\angle x \geq \angle \tilde{x}, \angle y \geq \angle \tilde{y}, \angle z \geq \angle \tilde{z}$ を満たすという主張が TCT であった³。

なぜ TCT が測地線論者に重宝され続けられているのか？その原点は、グローヴと塩濱の直径球面定理 ([GS]) の証明におけるシンプルかつシリアスな扱われ方にある。すなわち、彼らは距離関数の臨界点を定義し、その理論展開において TCT を併用させることにより、距離関数の解析的障害を克服したのである。少し詳しく述べる。点 $x \in X$ を完備リーマン多様体 X 上の点 $p \in X$ に対する距離関数 d_p の臨界点⁴とすると、臨界点の定義により、 x は p の切断点である。従って、 d_p は x で微分不可能である。そこで、彼らは、その x を一つの頂点として持ち、かつ x における内角が $\angle(pxy) \leq \pi/2$ である測地三角形 $\Delta(pxy) \subset X$ を描き、TCT を $\Delta(pxy)$ に適用しその解析的障害を克服した。ここで大切なことは、抽象的な対象 X に絵を描くという直接的な(手で触る)手法が確立されたということである。実際、グローモフは距離関数の臨界点理論をイソトピー命題として純化し、断面曲率がある負の定数で下から押さえられたコンパクト・リーマン多様体のありとあらゆるリーマンならでの特性に目をつけ、TCT とその命題を応用し、有名なベッチ数の総和の評価を得ている ([G])。

このように、測地線論の立場からグローヴと塩濱以降の測地線論を展開し、曲率と位相の関係を研究する際に TCT を避けて通ることは出来ない。従って、本講演において、フィンスラー幾何学における TCT の解説から始めなければ、フィンスラー多様体の曲率と位相の関係を紹介することは出来ない。

2 フィンスラーで TCT を確立する際の障害は何か？

最近、フィンスラー多様体上で TCT を角度の観点から初めて確立した ([KOT1], [K])。我々の TCT が「初」となったフィンスラー幾何学固有の要因、つまりリーマン幾何学にはない障害、を説明しなければ、我々の TCT が持つ仮定の意味、およびその応用によって得られる結果に課せられた仮定さえも誤解してとらえられる可能性がある。そこで、本章では、TCT を確立する際の障害について述べる。

¹第 60 回幾何学シンポジウム (2013 年 8 月 25 日), 基調講演

²東海大理, e-mail: keikondo@keyaki.cc.u-tokai.ac.jp

³断面曲率が 1 以上または -1 以上であるときも TCT は成立する。参照空間はそれぞれ $S^2, \mathbb{H}^2(-1)$ である。

⁴点 $x \in X$ が d_p の臨界点である (または p に対する臨界点である) とは、全ての $v \in T_x X \setminus \{0\}$ に対し、 $\angle(v, \dot{\gamma}(0)) \leq \pi/2$ を満たす x と p を結ぶ最短測地線 γ が存在するときをいう。

2.1 定義を若干

以下、 (M, F) をフィンスラー構造 $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ を持つ前向き完備連結 n 次元 C^∞ フィンスラー多様体 M とする⁵。 M が**可逆** (または F が**可逆**) であるとは、任意の $v \in TM \setminus \{0\}$ に対し $F(-v) = F(v)$ であるときをいう。 そうではないとき M を**非可逆** (または F を非可逆) と呼ぶ。 F の強凸性により、 $v \in T_x M \setminus \{0\}$ 方向のリーマン計量

$$g_v$$

が定義される⁶。ここで大切な事は g_v の単位球面 $S^{n-1}(1)$ は F の単位球面 $S^{n-1}(1)$ (対称性はないが凸) と $v/F(v)$ で2次まで接するということである (図1)。

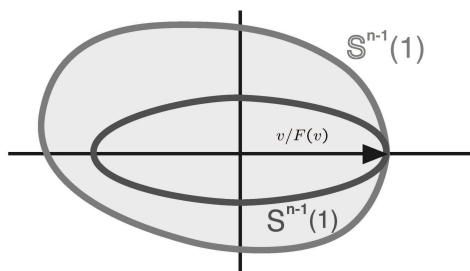


図 1: 接するイメージ

従って、 $g_v(v, v) = F(v)^2$ であるが、各点 $x \in M$ における各方向 $v \in T_x M$ と任意の $w \in T_x M$ に対し、 $F(w)^2 \geq g_v(w, w)$ のときもあれば $g_v(w, w) \geq F(w)^2$ のときもある。この F と g_v の違いは、比較幾何における参照空間 (回転面モデル) のねじれ関数の単調性と深く関わってくる (詳しくは第3章にて)。

更に、 $x, y \in M$ に対し、 x から y への**距離**を

$$d(x, y) := \inf \left\{ \int_0^1 F(\dot{c}) dt \mid c : [0, 1] \xrightarrow{C^1} M, c(0) = x, c(1) = y \right\}$$

と定義する。 d は三角不等式を満たすが、 F が可逆でなければ 対称性を持たない。

2.2 距離の非対称性が障害か？

リーマン多様体上の各点における接空間でリーマン計量に関しコーシー・シュワルツの不等式が成立するので、余弦、つまり角度を定義できた。これは、距離に関する

⁵ 「前向き完備」とは、任意の測地線 $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ が $[0, \infty)$ まで拡張出来るときをいう。

⁶ F の定義より (ミンコフスキ・ノルムなので)、 n 次対称行列

$$g_{ij}(v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (F^2)}{\partial v^i \partial v^j} (v), \quad \forall v \in TM \setminus \{0\}$$

は正定値である。そこで、 $T_x M$ 上の内積 g_v を

$$g_v \left(\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \sum_{j=1}^n b^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) := \sum_{i,j=1}^n a^i b^j g_{ij}(v)$$

と定める。

第一変分公式の立場に立てば、リーマン多様体上の3点 p, x, y に対し不等式

$$(2.1) \quad |d(p, x) - d(p, y)| \leq d(x, y)$$

が成立するから角度を定義出来ていたと言い換えることが出来る。

ところが、上述の通り一般のフィンスラー多様体 (M, F) において d は非対称であるから、一般に (2.1) は成立しない。そこで、

$$d_m(x, y) := \max\{d(x, y), d(y, x)\}$$

と新しい距離を導入する。すると、 d_m の対称性により、異なる3点 $p, x, y \in M$ に対し、

$$(2.2) \quad |d(p, x) - d(p, y)| \leq d_m(x, y) \iff -1 \leq \frac{d(p, x) - d(p, y)}{d_m(x, y)} \leq 1$$

を得る。よって、余弦の値域と同じなので、「角度」を定義出来る。

定義 2.1 ([KOT1]) $p \in M$ を固定する。 p を通らない速度1 ($F(\dot{c}) \equiv 1$) の最短測地線分を $c: [0, a] \rightarrow M$ で表すとき、

$$(2.3) \quad \cos \overrightarrow{\angle}(pc(s)c(a)) := -\lim_{h \downarrow 0} \frac{d(p, c(s+h)) - d(p, c(s))}{d_m(c(s), c(s+h))} \quad (s \in [0, a)),$$

$$(2.4) \quad \cos \overleftarrow{\angle}(pc(s)c(0)) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{d(p, c(s)) - d(p, c(s-h))}{d_m(c(s-h), c(s))}, \quad (s \in (0, a])$$

によって定義される角度 $\overrightarrow{\angle}(pc(s)c(a))$ と $\overleftarrow{\angle}(pc(s)c(0))$ をそれぞれ点 $c(s)$ における**前向き角度**、**後ろ向き角度**と呼ぶ。

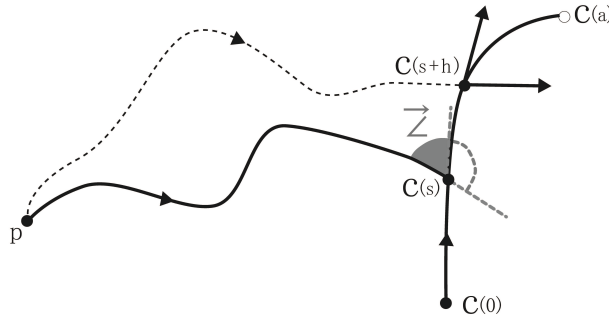


図 2: 前向き角度

注意 2.2 $\lambda := \max\{1, F(-\dot{c}(s))\}$ ($F(\dot{c}) \equiv 1$ に注意) とおくとき、(2.3) と (2.4) の具体的な極限值は、それぞれ

$$(2.5) \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{d(p, c(s+h)) - d(p, c(s))}{d_m(c(s), c(s+h))} = \frac{1}{\lambda} \min \{g_v(v, \dot{c}(s)) \mid v \in \mathcal{G}_p(c(s))\}$$

$$(2.6) \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{d(p, c(s)) - d(p, c(s-h))}{d_m(c(s-h), c(s))} = \frac{1}{\lambda} \max \{g_v(v, \dot{c}(s)) \mid v \in \mathcal{G}_p(c(s))\}$$

となる ([KOT1, Lemma 2.2])。ここで、

$$(2.7) \quad \mathcal{G}_p(x) := \{\dot{\mu}(l) \in T_x M \mid \mu \text{ は } p = \mu(0) \text{ から } x = \mu(l) \text{ への最短測地線}\}$$

である。

定義 2.3 ([KOT1]) 異なる3点 $p, x, y \in M$ に対し、 γ を p から x への、 σ を p から y への、 c を x から y への、それぞれが F に関し速度1の測地線分とする (図3)。これら向きも込めた3線分 γ, σ, c によって構成される測地三角形を (p からの) **前向き三角形** と呼び、

$$\Delta(\vec{p}\vec{x}, \vec{p}\vec{y}) := (p, x, y; \gamma, \sigma, c)$$

で表す。線分 c の向きを考慮し、 $\Delta(\vec{p}\vec{x}, \vec{p}\vec{y})$ の各頂点 x, y における内角を、それぞれ前向きと後ろ向き角度を用いて、

$$\vec{Z}_x := \vec{Z}(pxy), \quad \overleftarrow{Z}_y := \overleftarrow{Z}(pyx)$$

と定義する。

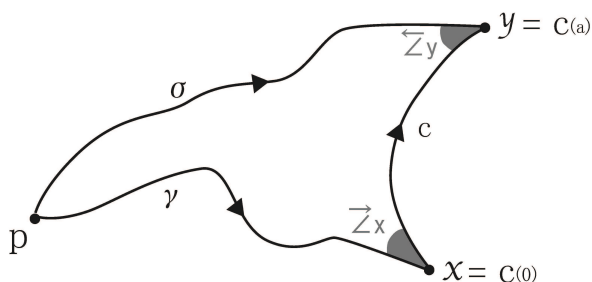


図 3: 前向き三角形と内角

注意 2.4 古くからフィンスラー多様体上の「角度」の定義は色々と試みられたが、比較定理における角度として、つまり 測地三角形と角度の組として機能する定義 は、我々の定義 2.1 が初と言える。では、

(2.8) 比較定理において測地三角形との組として機能する角度

とはどういうことであろうか。その答えは我々測地線論者がリーマン幾何学において TCT の証明で使う測地三角形の張り合わせのテクニックの中にある。以下、このことを説明しよう： (M, F, p) 上の前向き三角形 $\Delta(\vec{p}\vec{x}, \vec{p}\vec{y})$ を図4の様に分割する。

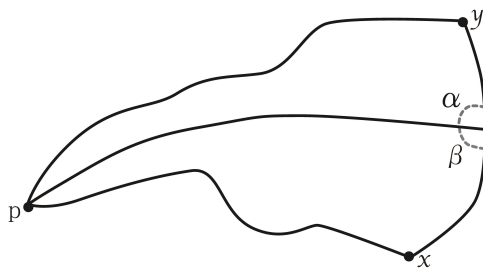


図 4: 分割

このとき、どのような角度の定義であれ、図4の角度 α と β が (少なくとも) 次の不等式を満たさなくてはならない。

(2.9)
$$\alpha + \beta \leq \pi$$

定義 2.1 は (2.9) を満たすことに注意。それでは、なぜ (2.9) が (2.8) の為に必要とされるのか。簡単のために M の曲率 (正確には旗曲率⁷) が非負とし、 F が可逆と仮定する。ここで、参照空間は \mathbb{R}^2 である。今、 $\Delta(\vec{px}, \vec{py})$ を図 5 の様に細長い前向き三角形達に分割する。更に、各細長い三角形に対し TCT をなんとか証明出来たと仮定する⁸。

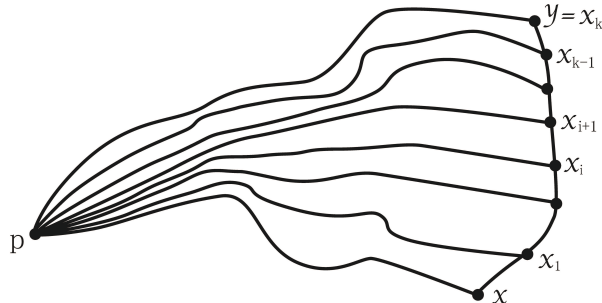


図 5: 細長く分割

この仮定により、各細長い三角形 $\Delta(\vec{px}_i, \vec{px}_{i+1})$ に対応する辺の長さが等しい測地三角形 $\tilde{\Delta}(\vec{p}\tilde{x}_i, \vec{p}\tilde{x}_{i+1})$ を \mathbb{R}^2 上に描け、かつ $\Delta(\vec{px}_i, \vec{px}_{i+1})$ の各頂点 x_i, x_{i+1} は $\angle x_i \geq \angle \tilde{x}_i$, $\angle x_{i+1} \geq \angle \tilde{x}_{i+1}$ を満たす。よって、各点 x_i は (2.9)、すなわち、 $\angle x_i + \angle x_{i+1} \leq \pi$ を満たすので、 \mathbb{R}^2 上で各 $\tilde{\Delta}(\vec{p}\tilde{x}_i, \vec{p}\tilde{x}_{i+1})$ を (長さの等しい辺 $\vec{p}\tilde{x}_i$ 同士を) 張り合わせ、図 6 の様な凸集合を得る。

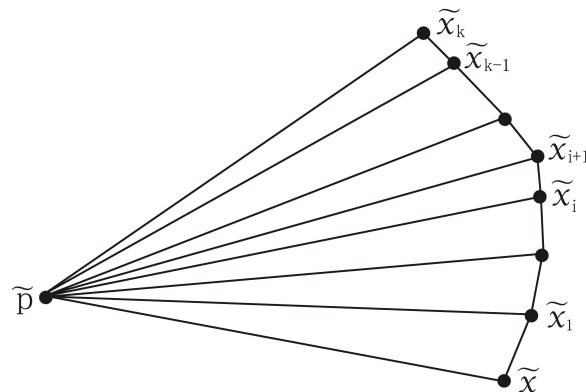


図 6: \mathbb{R}^2 上の凸集合

この凸集合が大切なのである。と言うのは凸性により、 $\Delta(\vec{px}, \vec{py})$ に対応する辺の長さが等しい測地三角形で $\angle x \geq \angle \tilde{x}$, $\angle y \geq \angle \tilde{y}$ を満たす $\tilde{\Delta}(\vec{p}\tilde{x}\tilde{y})$ を図 7 の様に見つけてくることが出来るからである。

従って、注意 2.4 より、TCT を証明する際に大切なことは

細長い三角形に対し TCT を証明すること

である。しかし、これが実に難しく、リーマン幾何的手法に立ったとき、フィンスラー特有の どうしようもない大きな障害 (個性) にぶち当たる。

⁷ g_v によって定義される断面曲率である。正確な定義は定義 3.6。

⁸この状況で、TCT が全ての細長い三角形に対し成立するとは限らない。反例は例 3.12 を参照。

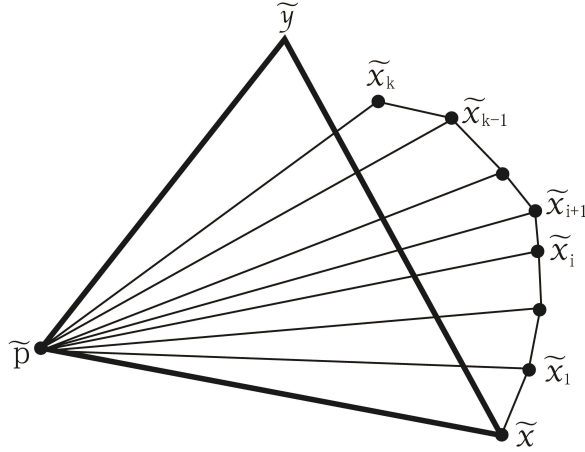


図 7: $\tilde{\Delta}(\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y})$ を見つける。

2.3 障害は共変微分である。

見出しの通りである。早速、定義から入ろう。

定義 2.5 $v \in T_x M \setminus \{0\}$ を参照ベクトルとする $w \in T_x M$ による C^∞ -ベクトル場 $X = \sum_{i=1}^n X^i(\partial/\partial x^i)$ の共変微分を

$$(2.10) \quad D_w^v X(x) := \sum_{i,j=1}^n \left\{ w^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) + \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i(v) w^j X^k(x) \right\} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x$$

と定義する。

注意 2.6 (2.10) の Γ_{jk}^i が M の点のみに依存するとき、 M はベルワルド空間と呼ばれる。

注意 2.7 (太田の警告) 任意の $x \in M$ を固定し、 V を $V(x) = v$ を満たす x の開近傍上のベクトル場とする。このとき、(2.10) の共変微分の代わりに V によるリーマン計量 g_V についての $D_w^{g_V} X(x)$ を考えると、 $D_w^{g_V} X(x)$ と $D_w^v X(x)$ が一致するには、 V の積分曲線が測地線であり、かつ $X(x) = v$ または $w = v$ であることが必要十分である ([O])。すなわち、

「 g_V を用いて何でもかんでもリーマン幾何に帰着できるわけではない」

と警告している。

この注意 2.7 を測地線に関して書き下すと、

- (a) $c : [0, a] \rightarrow M$ が測地線であるための必要十分条件は $D_{\dot{c}} \dot{c} \equiv 0$ である。
- (b) $c : (-a, a) \rightarrow M$ をその速さが $1 (F(\dot{c}) \equiv 1)$ である測地線とし、 $s \in (-a, a)$ を固定する。このとき、 $v \neq \dot{c}(s)$ を満たす $v \in T_x M (x := c(s))$ に対し、 F が可逆だとしても、一般に

$$D_{\dot{c}}^v \dot{c} \neq 0$$

が成り立つ。つまり、

$$(2.11) \quad g_v(\dot{c}(s), \dot{c}(s)) \neq 1$$

が起こり得る。

この (2.11) が、フィンスラー多様体の曲率と位相の関係を研究する際に、リーマン幾何学的手法にのつとつた第二変分公式の応用に 大きな障害 を与え、リーマン幾何学との本質的な 違いの一つ を与えている。これを以下に視てみよう：

例 2.8 任意の $q \in M \setminus (\text{Cut}(p) \cup \{p\})$ を固定する。ここで、 $\text{Cut}(p)$ は p の切断跡を表す。 $B_{2r}^-(q) \cap (\text{Cut}(p) \cup \{p\}) = \emptyset$ 、かつ $B_r^\pm(q) := B_r^+(q) \cap B_r^-(q)$ が測地的凸集合となるように $r > 0$ を十分小さくとる。ここで、 $B_r^+(q) := \{x \in M \mid d(q, x) \leq r\}$ 、 $B_r^-(q) := \{x \in M \mid d(x, q) \leq r\}$ である。 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow B_r^\pm(q)$ を速度が 1 ($F(\dot{c}(s)) = 1$) の最短測地線とすると、 r の取り方により、 C^∞ -測地変分

$$\varphi(t, s) := \exp_p \left(\frac{t}{l} \exp_p^{-1}(c(s)) \right), \quad \forall (t, s) \in [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

を得る。ここで $l := d(p, c(0))$ とする。 $x := c(0) \notin \text{Cut}(p)$ なので、 $p = \gamma(0)$ から出る $x = \gamma(l)$ への最短測地線 $\gamma : [0, l] \rightarrow M$ がただ一つ存在する。このとき、 γ に沿ったジャコビ場

$$J(t) := \frac{\partial \varphi}{\partial s}(t, 0), \quad J(0) = 0, \quad J(l) = \dot{c}(0)$$

を得る。また $\dot{\gamma}(t)$ に対する $J(t)$ の $g_{\dot{\gamma}}$ -直交成分は

$$(2.12) \quad J^\perp(t) := J(t) - \frac{g_{\dot{\gamma}(l)}(\dot{\gamma}(l), \dot{c}(0))}{l} t \dot{\gamma}(t)$$

となる ([KOT1, Lemma 3.2])。 x における $\dot{\gamma}(l)$ と $\dot{c}(0)$ のなす角を ω で表す、すなわち、

$$\omega := \pi - \overrightarrow{\angle}(pc(0)c(\varepsilon))$$

である。すると、(2.5) と (2.6) より、 $g_{\dot{\gamma}(l)}(\dot{\gamma}(l), \dot{c}(0)) = \lambda \cos \omega$ となるので、(2.12) から

$$(2.13) \quad g_{\dot{\gamma}(l)}(J^\perp(l), J^\perp(l)) = g_{\dot{\gamma}(l)}(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) - (\lambda \cos \omega)^2$$

を得る。ここで、 $\lambda = \max\{1, F(-\dot{c}(s))\}$ であった。以下、簡単のため $\lambda = 1$ とすると、(2.11) と (2.13) により、一般に、

$$(2.14) \quad J^\perp(t) \neq \sin \omega X(t)$$

である。ここで、 X は $g_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}, X) \equiv 0$ 、 $X(0) = 0$ 、 $g_{\dot{\gamma}(l)}(X(l), X(l)) = 1$ を満たす γ に沿った適当なジャコビ場である。従って、 M の曲率がある定数で下から押さえられている状況で、リーマン幾何学的手法にのつとつた第二変分公式を適応すると、(2.14) のために参照空間との変分の長さの差 (指数型の差) においてリーマン・ケースにはない誤差が生まれる。これをいかに凌ぐかは、第 3 章の注意 3.15 を参照。

3 TCT

後述するフィンスラー幾何における断面曲率、すなわち旗曲率は g_v による断面曲率であるから、方向 v に依存する。一方、リーマン幾何における放射(断面)曲率は、基点から出る最短測地線の世界速度ベクトルとそれに一次独立なベクトルで張られる 2次元線形空間に制限した断面曲率であった。従って、

旗曲率と放射曲率の幾何の明らかな類似性

を認めることが出来る！以下、放射曲率のマナーに従って話を進める。

3.1 定義と反例

定義 3.1 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ が**回転面モデル**であるとは、完備単連結曲面 \widetilde{M} のリーマン計量 $d\tilde{s}^2$ が基点 $\tilde{p} \in \widetilde{M}$ の周りの測地的極座標

$$d\tilde{s}^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2, \quad (t, \theta) \in (0, l) \times \mathbb{S}_p^1 \quad (0 < l \leq \infty)$$

で表されているときをいう。ここで、 $\mathbb{S}_p^1 := \{v \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M} \mid \|v\| = 1\}$ であり、 $f : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ は滑らかな正値関数でジャコビ方程式 $f''(t) + G(\tilde{\gamma}(t))f(t) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ を満たすものとする。ガウス曲率 $G(\tilde{\gamma}(t))$ は基点 \tilde{p} から出る(任意の)子午線 $\tilde{\gamma}$ に沿った \widetilde{M} の**放射曲率関数**と呼ばれる。以下において、簡単のため $G(t) := G(\tilde{\gamma}(t))$ とする。

注意 3.2 もし $f(t) = t, \sin t, \sinh t$ ならば、それぞれ $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2, \mathbb{H}^2(-1)$ となる。

定義 3.3 G が単調減少関数であるとき、 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ を**マンゴルト回転面**と呼ぶ。

注意 3.4 マンゴルト回転面 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ の点 $\tilde{x} \neq \tilde{p}$ の $\text{Cut}(\tilde{x})$ は、空集合、または子午線 $\theta^{-1}(\theta(\tilde{x}) + \pi)$ に含まれる半直線である ([T])。

例 3.5 (1) 球面のみが滑らかなコンパクト・マンゴルト回転面であり、さもなくば $\lim_{t \uparrow l} f(t) = 0$ かつ $\lim_{t \uparrow l} f'(t) > -1$ であるから、コンパクト・マンゴルト回転面はアレクサンドロフ空間である。つまり、その様な $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ は \tilde{p} からの最大距離 $d(\tilde{p}, \tilde{q}) = l$ を満たす点 $\tilde{q} \in \widetilde{M}$ で特異点を持つ。

(2) 回転放物面や二葉双曲面(の連結成分)は非コンパクト・マンゴルト回転面の代表的な例である。変則的なマンゴルト回転面の例は、 $f(t) := e^{-t^2} \tanh t$ のときで、 $\lim_{t \downarrow 0} G(t) = 8$ かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = -\infty$ を満たす ([KT1, Example 1.2])。

以下、 (M, F, p) を滑らかな前向き完備連結 C^∞ フィンスラー多様体 (M, F) と基点 $p \in M$ の組とする。このとき、リーマン計量 g_v によって「断面曲率」を定義出来る。

定義 3.6 一次独立なベクトル $v, w \in T_x M \setminus \{0\}$ に対し、

$$K_M(v, w) := \frac{g_v(R^v(w, v)v, w)}{g_v(v, v)g_v(w, w) - g_v(v, w)^2}$$

を**旗曲率**と呼ぶ。ここで、 R^v はチャーン接続から定義される曲率テンソルを表す(詳細は [BCS, §3.9]) を参照)。

定義 3.7 M の (p に関する) 放射旗曲率が $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ の放射曲率関数で下から押さえられているとは、 p から出る速度 1 ($F(\dot{\mu}) \equiv 1$) の任意の最短測地線 $\mu : [0, l) \rightarrow M$ に沿って、旗曲率 K_M が、

$$(3.1) \quad K_M(\dot{\mu}(t), w) \geq G(t), \quad \forall t \in [0, l), \quad \forall w \in T_{\mu(t)}M$$

を満たすときをいう。ここで、 $w \in T_{\mu(t)}M$ は $\dot{\mu}(t)$ に対し一次独立とする。

注意 3.8 以下、 M が満たす条件として「 M の (p に関する) 放射旗曲率が $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ の放射曲率関数で下から押さえられている」と述べるのは長く煩わしいので、省略形として、(3.1) を用いて単純に

$$\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t)$$

で表す。ここで、 $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) := K_M(\dot{\mu}(t), w)$, $\forall t \in [0, l)$, $\forall w \in T_{\mu(t)}M$ である。

定義 3.9 $v, w \in T_x M \setminus \{0\}$ に対し、

$$\mathcal{T}_M(v, w) := g_X(D_Y^Y Y(x) - D_Y^X Y(x), X(x))$$

を**接曲率**と呼ぶ。ここで、 X, Y は v, w の局所拡張である。

注意 3.10 M がベルワールド空間であるための必要十分条件は、 $\mathcal{T}_M \equiv 0$ である ([S2])。

定義 3.11 M が $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t)$ を満たすとする。このとき、測地三角形 $\Delta(\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y}) \subset \widetilde{M}$ が前向き三角形 $\Delta(\vec{p}\vec{x}, \vec{p}\vec{y}) = (p, x, y; \gamma, \sigma, c) \subset M$ に対する**比較三角形**であるとは、

$$\tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{x}) = d(p, x), \quad \tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{y}) = d(p, y), \quad \tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = L_m(c)$$

を満たすときをいう。ここで、

$$L_m(c) := \int_0^{d(x, y)} \max\{F(\dot{c}), F(-\dot{c})\} ds$$

である。 $L_m(c)$ を採用する理由は注意 3.15 で後述する。

$\Delta(\vec{p}\vec{x}, \vec{p}\vec{y}) \subset M$ に対する比較三角形 $\Delta(\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y}) \subset \widetilde{M}$ を描けるからといって、TCT が成立するとは限らない。以下の例を見てみよう：

例 3.12 ([K, Example 2.5]) q を 2 以上の十分大きい偶数とし、 M を l^q -ノルムをもつ \mathbb{R}^2 とする。この時、 M はミンコフスキ空間である。 $p = (0, 0), x = (1, 0), y = (0, 1) \in M$ とし、 x と y を結ぶ測地線分を $c(t) = (1-t, t)$ で表すと、 q は十分大きいので p から $c(t)$ への距離は速く減る。すなわち、 x, y における内角は殆ど 0 である。一方、測地三角形 $\Delta(\vec{p}\vec{x}, \vec{p}\vec{y})$ は殆ど正三角形であり、 M の旗曲率が恒等的に 0 であることから、 \mathbb{R}^2 上に対応する辺の長さが $\Delta(\vec{p}\vec{x}, \vec{p}\vec{y})$ と等しい測地三角形を $\Delta(\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y})$ を描くと、 $\Delta(\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y})$ も殆ど正三角形なので $\angle x < \angle \tilde{x}$ 、かつ $\angle y < \angle \tilde{y}$ となり、TCT は成立しない。

従って、フィンスラー幾何において、TCT はかなり強い制限を受けることが分かる。

3.2 曲率が一定でない回転面モデルの場合の TCT

初めに、 G が必ずしも一定でない回転面モデルが参照空間である場合を紹介する。

定理 3.13 ([KOT1, Theorem 1.2]) $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ を非コンパクト・マンゴルト回転面とし、ある唯一の $\rho \in (0, \infty)$ に対し、 $f'(\rho) = 0$ を満たすものとする。この $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ に対し、滑らかな前向き完備連結フィンスラー多様体 (M, F, p) が $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t)$ を満たすと仮定する。次の 4 条件を満たす前向き三角形 $\Delta(\vec{p}\tilde{x}, \vec{p}\tilde{y}) = (p, x, y; \gamma, \sigma, c)$ を M に描く、すなわち、 c のある開近傍 $\mathcal{N}(c)$ に対し、

- (1) $c([0, d(x, y)]) \subset M \setminus \overline{B_\rho^+(p)}$,
- (2) $g_v(w, w) \geq F(w)^2, \forall z \in \mathcal{N}(c), \forall v \in \mathcal{G}_p(z), \forall w \in T_z M$,
- (3) $\mathcal{T}_M(v, w) = 0, \forall z \in \mathcal{N}(c), \forall v \in \mathcal{G}_p(z), \forall w \in T_z M$,
- (4) $[0, d(x, y)]$ 上で c の逆向き $\bar{c}(s) := c(d(x, y) - s)$ が測地線。

もしこの $\Delta(\vec{p}\tilde{x}, \vec{p}\tilde{y})$ に対する比較三角形 $\Delta(\vec{p}\tilde{x}\tilde{y})$ を \widetilde{M} に描けるならば、

$$\vec{\angle} x \geq \angle \tilde{x}, \quad \overleftarrow{\angle} y \geq \angle \tilde{y}$$

が成立する。ここで、 $\mathcal{G}_p(z)$ は (2.7) である。

注意 3.14 定理 3.13 の各条件について説明をする：(3) と (4) は、例えば、 F がベルワルド型であれば満たされる。注意 2.7 から c は g_v に関する測地線である必要はない。実際、(3) から $0 = \mathcal{T}_M(v, \dot{c}(s)) = -g_v(D_{\dot{c}(s)}^v \dot{c}(s), v)$ なので、 $g_v(D_{\dot{c}}^v \dot{c}, v) = 0$ と言っているに過ぎない。一般に、 $D_{\dot{c}}^v \dot{c} \neq D_{\dot{c}}^{g_v} \dot{c}$ であった。また (3) は、 \widetilde{M} がリーマンである限りにおいては自然な仮定である。なぜなら \widetilde{M} の接曲率は恒等的に 0 だからである。 $L_m(c)$ を採用した理由は、2 つある。一つは \bar{c} が最短とは限らないからである (勿論、 \bar{c} が最短であれば、 $L_m(c) = d_m(x, y)$ である)。もう一つの理由は角度の定義 (と細長い前向き三角形の張り合わせ) のためである。(1) と (2) により、 $\widetilde{M} \setminus \overline{B_\rho(\tilde{p})}$ の強凸性を $M \setminus \overline{B_\rho^+(p)}$ に移植出来、結果、

(3.2) 十分細長い前向き三角形に対し TCT が成立する。

すなわち、(1) と (2) のおかげで、例 2.8 で述べた共変微分の障害を克服出来るのである。注意 3.15 にて、如何様に共変微分の障害が克服されるのかを具体的に視て行こう。

注意 3.15 定理 3.13 の条件のもと、例 2.8 の状況を考える⁹。記号 $\varphi, l, \gamma, J, \omega, J^\perp$ など、全て例 2.8 で定義されたものである。更に $B_\rho^+(p) \cap B_{2r}^-(q) = \emptyset$ を仮定し、ある適当な $\theta \in (0, \pi/2)$ に対し $\omega \in [\theta, \pi - \theta]$ とする。今、マンゴルト回転面 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ を、適当な小さな定数 $\delta > 0$ に対し膨らませたものを $(\widetilde{M}_\delta, \tilde{o})$ で表す、すなわち、 $(\widetilde{M}_\delta, \tilde{o})$ の計量 $d\tilde{s}_\delta^2 = dt^2 + f_\delta(t)^2 d\theta^2$ は、ジャコビ方程式 $f_\delta'' + (G - \delta)f_\delta = 0, f_\delta(0) = 0, f_\delta'(0) = 1$ を満たし、ユニークな $\rho_\delta \in (0, \infty)$ に対し、 $f_\delta'(\rho_\delta) = 0$ かつ $l > \rho_\delta$ を満たすものとする。

⁹本注において、あえて幾何的直感を優先したため、細かい記述に正確性を欠く部分がある。細かい記述は論文 [KOT1] を参照されたい。

この状況のもと、例 2.8 と同様の変分を \widetilde{M}_δ に以下様に張る： $\widetilde{d}_\delta(\tilde{o}, \tilde{x}) = l$ を満たす任意の点 $\tilde{x} \in \widetilde{M}_\delta$ を固定し、 \tilde{o} と \tilde{x} を結ぶ最短測地線（子午線の部分弧）を $\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow \widetilde{M}_\delta$ で表す。 $\tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \widetilde{M}_\delta$ を $\tilde{x} = \tilde{c}(0)$ を通り、かつ

$$(3.3) \quad \angle(\dot{\tilde{\gamma}}(l), \dot{\tilde{c}}(0)) = \omega, \quad \|\dot{\tilde{c}}\| = \lambda = \max\{1, F(-\dot{\tilde{c}}(0))\}$$

を満たす最短測地線線分とする。ここで大切なことは、(3.3) における右の式 $\|\dot{\tilde{c}}\| = \lambda$ である。この様に \tilde{c} の速度をとる事によって、

F の非可逆性も同時に取り扱うことが出来る。

と同時に、これが $L_m(c)$ を採用する理由でもある（張り合わせのテクニックと角度の定義の絶妙なバランスがここにある）。さて、 $(\widetilde{M}_\delta, \tilde{o})$ は回転面なので、 C^∞ -測地変分 $\tilde{\varphi}(t, s) := \exp_{\tilde{o}}\left(\frac{t}{l} \exp_{\tilde{o}}^{-1}(\tilde{c}(s))\right)$, $\forall (t, s) \in [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ を張る事が出来、同時に $\tilde{\gamma}$ に沿ったジャコビ場 $\tilde{J}(t) := \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial s}(t, 0)$, $\tilde{J}(0) = 0$, $\tilde{J}(l) = \dot{\tilde{c}}(0)$ を得る。(2.12) と同様に \tilde{J} の $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ に対する直交成分 $\tilde{J}^\perp(t) := \tilde{J}(t) - \frac{\langle \dot{\tilde{\gamma}}(l), \dot{\tilde{c}}(0) \rangle}{l} t \dot{\tilde{\gamma}}(t)$ を得る。一方、 \tilde{E} を $\dot{\tilde{\gamma}}$ に直交する $\tilde{\gamma}$ の沿った平行単位ベクトル場とすると、 $\dot{\tilde{\gamma}}$ に直交する $\tilde{\gamma}$ の沿ったジャコビ場 $\tilde{X}(t) := \frac{1}{f_\delta(l)} f_\delta(t) \tilde{E}(t)$ を新たに得る。このとき、 $\tilde{J}^\perp(l) = \dot{\tilde{c}}(0) - \lambda \cos \omega \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(l) = \pm \lambda \sin \omega \cdot \tilde{E}(l) = \pm \lambda \sin \omega \cdot \tilde{X}(l)$ に注意すると、 $d\tilde{s}_\delta^2$ がリーマンであり、かつ \tilde{J}^\perp と \tilde{X} が共にジャコビ場であることから、

$$(3.4) \quad \tilde{J}^\perp(t) = \pm \lambda \sin \omega \cdot \tilde{X}(t), \quad \forall t \in [0, l]$$

であることが分かる。この状況のもと、(3.2) を示すには、十分小さい適当な定数 $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ に対し、

$$(3.5) \quad L(s) := d(p, c(s)) \leq \tilde{L}(s) := \tilde{d}(\tilde{o}, \tilde{c}(s)), \quad \forall s \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$

が言えればよい。実際、 c が有界領域内にあることに注意しつつ、 $L(s)$ と $\tilde{L}(s)$ それぞれにテイラー展開を行い差をとると、ある定数 $C_1 > 0$ が存在し、

$$(3.6) \quad \tilde{L}(s) - L(s) \geq \frac{s^2}{2} \{ \tilde{I}_l(\tilde{J}^\perp, \tilde{J}^\perp) - I_l(J^\perp, J^\perp) \} - C_1 |s|^3, \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

が成立する。ここで、 I_l は $\gamma|_{[0, l]}$ に沿った指数型¹⁰を表す。更に、 $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t) \geq G(t) - \delta$ であるので、(3.4) と指数型に関する比較定理 ([BCS, Lemma 7.3.2] 参照) より、

$$(3.7) \quad \tilde{I}_l(\tilde{J}^\perp, \tilde{J}^\perp) - I_l(J^\perp, J^\perp) \geq a \tilde{I}_l(\tilde{X}, \tilde{X}) + \frac{\delta \sin^2 \omega}{f_\delta(l)^2} \int_0^l f_\delta(t)^2 dt$$

となる。ここで、 $a := (\lambda \sin \omega)^2 - g_{\tilde{\gamma}(l)}(J^\perp(l), J^\perp(l))$ である。定理の条件 (2) より、

$$(3.8) \quad g_{\tilde{\gamma}(l)}(\dot{\tilde{c}}(0), \dot{\tilde{c}}(0)) \geq \lambda^2$$

¹⁰ X と Y を $\gamma|_{[0, l]}$ に沿った C^∞ ベクトル場とすると、 I_l は

$$I_l(X, Y) := \int_0^l \left\{ g_\gamma(D_\gamma^\dot{\gamma} X, D_\gamma^\dot{\gamma} Y) - g_\gamma(R^\dot{\gamma}(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y) \right\} dt$$

と定義される。

である¹¹。(2.13)より、 $g_{\dot{\gamma}(l)}(J^\perp(l), J^\perp(l)) = g_{\dot{\gamma}(l)}(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) - (\lambda \cos \omega)^2$ であったので、(3.8)より、

$$(3.9) \quad a = (\lambda \sin \omega)^2 - g_{\dot{\gamma}(l)}(J^\perp(l), J^\perp(l)) = \lambda^2 - g_{\dot{\gamma}(l)}(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) \leq 0$$

となる。一方、 δ は $l > \rho_\delta$ を満たす様に小さくとっていたので、

$$(3.10) \quad \tilde{I}_l(\tilde{X}, \tilde{X}) = \frac{f'_\delta(l)}{f_\delta(l)} < 0$$

となる(条件(1)だからこそこの不等式)。(3.9)と(3.10)より、

$$a\tilde{I}_l(\tilde{X}, \tilde{X}) \geq 0$$

が成立する。よって、(3.7)より、ある定数 $C_2 > 0$ が存在し、

$$\tilde{I}_l(\tilde{J}^\perp, \tilde{J}^\perp) - I_l(J^\perp, J^\perp) \geq \delta C_2 \sin^2 \omega$$

となる。ここが、(1)と(2)により $\widetilde{M} \setminus \overline{B_\rho(\tilde{p})}$ の強凸性が $M \setminus \overline{B_\rho^+(p)}$ に移植された瞬間である。従って、(3.6)より、

$$\tilde{L}(s) - L(s) \geq \frac{s^2}{2}(\delta C_2 \sin^2 \theta - 2C_1 s)$$

なので、 $\varepsilon_0 := \min\{\varepsilon, \delta C_2 \sin^2 \theta / 2C_1\}$ とおけば、(3.5)を得る。

例 3.16 (M, F, p) を定理3.13のマンガルト回転面 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ に対し、 $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t)$ を満たすフィンスラー多様体とする。もし F が $M \setminus \overline{B_\rho^+(p)}$ 上でリーマン構造であれば、定理3.13の(1)から(4)は全て満たされる。例えば、 F が $B_\rho^+(p)$ 上でランダース構造 $F(v) = \sqrt{g(v, v)} + \beta(v)$ 、かつ $M \setminus \overline{B_\rho^+(p)}$ 上でリーマン構造 $F(v) = \sqrt{g(v, v)}$ のときである。ここで、 β は M 上の1形式を表す。

例 3.17 (M, g, p) を定理3.13のマンガルト回転面 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ に対し、 $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t)$ を満たすリーマン多様体とする。 $M \setminus B_\rho^+(p)$ 上の g の単位球面を $\bigcup_{z \in M \setminus B_\rho^+(p)} \mathcal{G}_p(z)$ の近傍の外で、条件(2) $g_v(w, w) \geq F(w)^2$ を満たす様に変形する。 $v \in \bigcup_{z \in M \setminus B_\rho^+(p)} \mathcal{G}_p(z)$ あるとき、 g_v はこの変形による影響を受けないので、条件(3) $\mathcal{T}_M(v, w) = 0$ は満たされている。従って、

条件(2)から(4)を満たすフィンスラー多様体は沢山存在する。

¹¹実際、 $\lambda = 1$ のとき、 $g_{\dot{\gamma}(l)}(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) \geq F(\dot{c}(0))^2 = \lambda^2$ であり、一方、 $\lambda = F(-\dot{c}(0))$ のとき、

$$g_{\dot{\gamma}(l)}\left(\frac{-\dot{c}(0)}{F(-\dot{c}(0))}, \frac{-\dot{c}(0)}{F(-\dot{c}(0))}\right) \geq F\left(\frac{-\dot{c}(0)}{F(-\dot{c}(0))}\right)^2 = 1$$

なので、 $g_{\dot{\gamma}(l)}(\dot{c}(0), \dot{c}(0)) \geq F(-\dot{c}(0))^2 = \lambda^2$ となる。

3.3 参照空間が空間形の場合の TCT

さて、モデルが空間形であるときはどうであろうか。2次元の単位球面 $(\widetilde{M}, \tilde{p}) = (\mathbb{S}^2, \tilde{p})$ の場合の条件を知れば、自ずと残りのケースも分かる。

$\widetilde{M} = \mathbb{S}^2$ であるとき、 $f(t) = \sin t$ なので、任意の $t \in (\pi/2, \pi)$ に対し $f'(t) = \cos t < 0$ 、かつ $\pi/2 \in (0, \pi)$ だけに対し $f'(\pi/2) = 0$ である。従って、 $\Delta(\vec{px}, \vec{py})$ の p に対する対辺が $c([0, d(x, y)]) \subset M \setminus \overline{B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)}$ を満たすとき、定理 3.13 より以下が成立する：

定理 3.18 ([K, Corollary 2.8]) 滑らかなコンパクト連結フィンスラー多様体 (M, F, p) が $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq 1$ を満たすと仮定する。次の 4 条件を満たす前向き三角形 $\Delta(\vec{px}, \vec{py}) = (p, x, y; \gamma, \sigma, c)$ を M に描く、すなわち、 c のある開近傍 $\mathcal{N}(c)$ に対し、

- (1) $c([0, d(x, y)]) \subset M \setminus \overline{B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)}$,
- (2) $g_v(w, w) \geq F(w)^2$, $\forall z \in \mathcal{N}(c)$, $\forall v \in \mathcal{G}_p(z)$, $\forall w \in T_z M$,
- (3) $\mathcal{T}_M(v, w) = 0$, $\forall z \in \mathcal{N}(c)$, $\forall v \in \mathcal{G}_p(z)$, $\forall w \in T_z M$,
- (4) $[0, d(x, y)]$ 上で $\bar{c}(s) := c(d(x, y) - s)$ が測地線。

もしこの $\Delta(\vec{px}, \vec{py})$ に対する比較三角形 $\Delta(\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y})$ を \mathbb{S}^2 に描けるならば、 $\overrightarrow{\angle} x \geq \angle \tilde{x}$ かつ $\overleftarrow{\angle} y \geq \angle \tilde{y}$ が成立する。ここで、 $\mathcal{G}_p(z)$ は (2.7) である。

定理 3.13 (同様に定理 3.18) において注目すべき点は、 $[\rho, \infty)$ 上で f が単調減少であるとき、TCT は $M \setminus \overline{B_{\rho}^+(p)}$ 内の c の開近傍に条件 $g_v(w, w) \geq F(w)^2$ を要求していることである。この関係を見逃してはならない。なぜなら、比較幾何において、 M の位相は参照空間 \widetilde{M} によってコントロールされているからである。 $\widetilde{M} = \mathbb{S}^2$ であるとき、 $[0, \pi/2]$ 上で f は単調増加であるから、 $\Delta(\vec{px}, \vec{py})$ の p に対する対辺が $c([0, d(x, y)]) \subset \overline{B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)}$ を満たすとき、TCT 成立には c の開近傍に条件 $F(w)^2 \geq g_v(w, w)$ が必要であろうと予測出来る。実際、 $F(w)^2 \geq g_v(w, w)$ ならば、 $\lambda^2 \geq g_v(w, w)$ である。一方、 $\overline{B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)}$ 上で指数型は正であるが、 $\lambda^2 \geq g_v(w, w)$ のおかげで注意 3.15 と同様の議論が出来、次を得る：

定理 3.19 ([K, Lemma 2.9]) 滑らかなコンパクト連結フィンスラー多様体 (M, F, p) が $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq 1$ を満たすと仮定する。次の 4 条件を満たす前向き三角形 $\Delta(\vec{px}, \vec{py}) = (p, x, y; \gamma, \sigma, c)$ を M に描く、すなわち、 c のある開近傍 $\mathcal{N}(c)$ に対し、

- (1) $c([0, d(x, y)]) \subset B_{\frac{\pi}{2}}^+(p) \setminus \{p\}$,
- (2) $F(w)^2 \geq g_v(w, w)$, $\forall z \in \mathcal{N}(c)$, $\forall v \in \mathcal{G}_p(z)$, $\forall w \in T_z M$,
- (3) $\mathcal{T}_M(v, w) = 0$, $\forall z \in \mathcal{N}(c)$, $\forall v \in \mathcal{G}_p(z)$, $\forall w \in T_z M$,
- (4) $[0, d(x, y)]$ 上で $\bar{c}(s) := c(d(x, y) - s)$ が測地線。

もしこの $\Delta(\vec{px}, \vec{py})$ に対する比較三角形 $\Delta(\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y})$ を \mathbb{S}^2 に描けるならば、 $\overrightarrow{\angle} x \geq \angle \tilde{x}$ かつ $\overleftarrow{\angle} y \geq \angle \tilde{y}$ が成立する。ここで、 $\mathcal{G}_p(z)$ は (2.7) である。

注意 3.20 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ を放射曲率関数 G が非正である非コンパクト回転面モデルとし、この $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ に対し滑らかな前向き完備連結フィンスラー多様体 (M, F, p) が $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t)$ を満たすとする。すると、 f は増加関数なので \widetilde{M} 上全体で指数型は正である。よって、もし M が定理 3.19 における条件 (2), (3), (4) を満たせば、TCT は成立する。従って、この TCT より $\widetilde{M} = \mathbb{R}^2, \mathbb{H}^2(-1)$ の場合は自動的である。

4 TCT の応用

TCT を用いてリーマン幾何学の結果をフィンスラー空間に拡張できるかどうかは今後の大きな問題である。と言うのは、フィンスラー幾何において、曲率と位相の関係に関する結果は大変少ないからである。実際、1/4 ピンチ球面定理 ([R])、分裂定理 ([O])、有限性定理 ([S1]) ぐらいしか目立ったものはない。本章において、これまでの所、TCT を用いて拡張出来たものを紹介する。以下、 (M, F, p) を前向き完備連結 C^∞ フィンスラー多様体 (M, F) と基点 $p \in M$ の組とする。

4.1 グローヴと塩濱型の球面定理

グロモフのイソトロピー命題 (完備フィンスラー多様体でも成立)、及び定理 3.18 と定理 3.19 の応用として、グローヴと塩濱型の球面定理をフィンスラー多様体へと拡張出来る。両定理を応用するため、次の定義を導入する：

定義 4.1 ([K]) M の (p に関する) 放射接曲率がある定数 $\delta \in (-\infty, 0]$ で下から押さえられているとは、 p から出る速度 1 ($F(\dot{\mu}) \equiv 1$) の任意の最短測地線 $\mu : [0, l] \rightarrow M$ に沿って、接曲率 \mathcal{T}_M が、

$$\mathcal{T}_p(\dot{\mu}(t)) := \mathcal{T}_M(\dot{\mu}(t), w) \geq \delta, \quad \forall t \in [0, l], \quad \forall w \in T_{\mu(t)}M$$

を満たすときをいう。

定理 4.2 ([K, Theorem 1.3]) (M, F, p) を $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq 1$ かつ $\mathcal{T}_p(\dot{\mu}(t)) = 0$ を満たすコンパクト連結 n 次元フィンスラー多様体とし、

$$(1) \quad F(w)^2 \geq g_v(w, w), \quad \forall x \in B_{\frac{\pi}{2}}^+(p), \quad \forall v \in \mathcal{G}_p(x), \quad \forall w \in T_x M,$$

$$(2) \quad g_v(w, w) \geq F(w)^2, \quad \forall x \in M \setminus \overline{B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)}, \quad \forall v \in \mathcal{G}_p(x), \quad \forall w \in T_x M,$$

(3) 任意の最短測地線 $c : [0, a] \rightarrow M \setminus \{p\}$ に対し、 $\bar{c}(s) := c(a - s)$ が測地線、かつ

$$(4.1) \quad L_m(c) \leq \text{rad}_p := \sup_{x \in M} d(p, x)$$

を仮定する。もし $\text{rad}_p > \pi/2$ ならば、 M は \mathbb{S}^n に同相である。ここで、 $\mathcal{G}_p(x)$ は (2.7) である。

注意 4.3 定理 4.2 の証明の大まかな方針は、定理 3.18 と定理 3.19 を応用し、 $M \setminus \overline{B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)}$ と $\overline{B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)}$ が共に円盤であることを示す。すなわち、 p の臨界点 x が存在すると仮定し、その x を頂点とする前向き三角形 $\triangle(\overline{px}, \overline{py})$ に対し TCT を応用し矛盾を導く。 rad_p を実現する点は 1 点のみであることが分かるので、グロモフのイソトピー命題により結論を得る。さて、仮定 (3) の (4.1) を除き、定理 4.2 における接曲率と (1) から (3) の仮定は、定理 3.19 と定理 3.18 の十分条件であった (注意 3.14 と注意 3.15)。 (4.1) は次の仮定に弱めることが出来る：

$$L_m(c) \begin{cases} < \pi & (c \text{ が } c([0, a]) \cap (M \setminus B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)) \neq \emptyset \text{ を満たすとき}) \\ \leq \text{rad}_p & (c \text{ が } q \in \partial B_{\text{rad}_p}^+(p) \text{ から } B_{\frac{\pi}{2}}^+(p) \text{ 上の任意の点を結ぶとき}) \end{cases}$$

先に述べた様に $\partial B_{\text{rad}_p}^+(p) = \{q\}$ である ([K, Lemma 3.4])。尚、ボンネとマイヤースの定理 ([BCS, Theorem 7.7.1]) により、 $\text{diam}(M) := \sup_{x, y \in M} d(x, y) \leq \pi$ であるから、 $\text{rad}_p \leq \text{diam}(M) < \pi$ の場合のみを考えればよい。

定理 4.2 における仮定 (1) と (2) の大切な効果は、共変微分の障害を克服出来ることでもあった。グローヴと塩濱以降の測地線論を展開するうえで、これら 2 条件を弱めることは (これまでの所) 難しいと思われる。しかし、それ以外の仮定は、 F の構造を変える事によって弱めることが出来る：

系 4.4 ([K]) (M, F, p) を $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq 1$ かつ $\mathcal{T}_p(\dot{\mu}(t)) = 0$ を満たすコンパクト連結 n 次元 可逆 フィン斯拉ー多様体とし、

$$(1) F(w)^2 \geq g_v(w, w), \quad \forall x \in B_{\frac{\pi}{2}}^+(p), \forall v \in \mathcal{G}_p(x), \forall w \in T_x M,$$

$$(2) g_v(w, w) \geq F(w)^2, \quad \forall x \in M \setminus \overline{B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)}, \forall v \in \mathcal{G}_p(x), \forall w \in T_x M,$$

を仮定する。もし $\text{diam}(M) = \text{rad}_p > \pi/2$ ならば、 M は \mathbb{S}^n に同相である。

系 4.5 ([K]) (M, F, p) を $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq 1$ を満たすコンパクト連結 n 次元 ベルワルド空間 とし、

$$(1) F(w)^2 \geq g_v(w, w), \quad \forall x \in B_{\frac{\pi}{2}}^+(p), \forall v \in \mathcal{G}_p(x), \forall w \in T_x M,$$

$$(2) g_v(w, w) \geq F(w)^2, \quad \forall x \in M \setminus \overline{B_{\frac{\pi}{2}}^+(p)}, \forall v \in \mathcal{G}_p(x), \forall w \in T_x M,$$

$$(3) L_m(c) \leq \text{rad}_p$$

を仮定する。もし $\text{rad}_p > \pi/2$ ならば、 M は \mathbb{S}^n に同相である。

注意 4.6 系 4.5 において、更に可逆かつ $\text{diam}(M) = \text{rad}_p$ の仮定を加えたとしても、 M は非リーマンである。これより、定理 4.2 が特別なケース (F がリーマン構造) としてグローヴと塩濱の直径球面定理を含むことは明らかである。尚、 F がリーマン構造である場合、 \widetilde{M} は \mathbb{S}^2 である必要は無く、 \widetilde{M} がアレクサンドロフ型のマンゴルト回転面であっても定理 4.2 は成立する (詳細は [KO, Theorem A])。

4.2 有限位相型と微分同型定理

(M, F, p) が非コンパクトである場合、定理 3.13 の応用を紹介する。

定理 4.7 ([KOT2, Theorem A]) $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ をある唯一の $\rho \in (0, \infty)$ に対し $f'(\rho) = 0$ を満たす非コンパクト・マンゴルト回転面とする。この $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ に対し、 (M, F, p) を $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t)$ を満たす前向き完備非コンパクト連結フィンスラー多様体とする。もし、ある $t_0 > \rho$ に対し、

- (1) $\text{diam}(\partial B_t^+(p)) = O(t^\alpha)$, $\exists \alpha \in (0, 1)$, $t \rightarrow \infty$,
- (2) $g_v(w, w) \geq F(w)^2$, $\forall x \in M \setminus \overline{B_{t_0}^+(p)}$, $\forall v \in \mathcal{G}_p(x)$, $\forall w \in T_x M$,
- (3) $\mathcal{T}_M(v, w) = 0$, $\forall x \in M \setminus \overline{B_{t_0}^+(p)}$, $\forall v \in \mathcal{G}_p(x)$, $\forall w \in T_x M$,
- (4) 任意の最短測地線 $c: [0, a] \rightarrow M \setminus \overline{B_{t_0}^+(p)}$ に対し、 $\bar{c}(s) = c(a - s)$ が測地線

ならば、 M は有限位相型である。すなわち、 M はある境界付きコンパクト多様体の内部に同相である。ここで、 $\mathcal{G}_p(x)$ は (2.7) である。

注意 4.8 定理 4.7 の証明の大まかな方針は、 p に対する臨界点の発散点列 $\{x_i\}$ が存在すると仮定し、細長い前向き三角形 $\Delta(\overrightarrow{px_i}, \overrightarrow{py})$ (ここで i は十分大、 $y \in M \setminus \overline{B_{t_0}^+(p)}$) に対し定理 3.13 を適用し矛盾を導く。よって、グロモフのイソトピー命題により、 p に対する臨界点の集合は有界であることが分かる。さて、定理 4.7 の仮定 (2) から (4) については説明不要であろうから、それ以外について解説する。

- (a) 任意の 2 点 $x, y \in M \setminus \overline{B_\rho^+(p)}$ に対し、前向き三角形 $\Delta(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{py}) = (p, x, y; \gamma, \sigma, c)$ を M に描くと、仮定 (1) により、 $c([0, d(x, y)]) \subset M \setminus \overline{B_\rho^+(p)}$ が保証される。よって、比較三角形を許容する $\Delta(\overrightarrow{px}, \overrightarrow{py})$ に対し TCT を適応出来る。
- (b) 先行する研究として、仮定 (1) は、 F がリーマン構造の場合、アヴレッシュとグロモール ([AG]) によって有限位相の研究のために導入された仮定である。しかし、 F がリーマン構造の場合、(1) は M に大変強い制限を与える。例えば、 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ を非負放射曲率関数を持つ回転面モデルとし、リーマンである M が $\text{diam}(\partial B_t(p)) = o(t^{1/2})$ を満たすとき、 M は n 次元回転面モデルと等長となる ([ST, Theorem 1.2], [KT2, Example 1.1])。
- (c) 更に、 F がリーマン構造の場合、定理 4.7 は、 $(\widetilde{M}, \tilde{p})$ がより一般の回転面モデルであっても成立する (従って放射曲率はワイルドにその符号を変える): すなわち、もし \widetilde{M} が有界全曲率を許容し、かつセクター $\tilde{V}(\delta_0) := \{\tilde{x} \in \widetilde{M} \mid 0 < \theta(\tilde{x}) < \delta_0\}$ が切断点のペアを持たないとき、 M は有限位相型である ([KT2, Theorem 2.2])。このセクターに対する条件は、 \widetilde{M} の全曲率が 2π 未満であれば外すことが出来る ([TK, Theorem 1.3])。従って、**リーマンの場合は既に知られた結果であるが**、

フィンスラーにおいては初の結果である

ことに注意されたい。

定理 4.2 と同様、 F の構造を変えることで定理 4.7 の仮定を弱めることが出来る：

系 4.9 ([KOT2]) $(\widetilde{M}, \tilde{\rho})$ をある唯一の $\rho \in (0, \infty)$ に対し $f'(\rho) = 0$ を満たす非コンパクト・マンゴルト回転面とする。この $(\widetilde{M}, \tilde{\rho})$ に対し、 (M, F, p) を $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t)$ を満たす前向き完備非コンパクト連結フィンスラー多様体とし、 F は $M \setminus \overline{B_{t_0}^+(p)}$ 上で **ベルワルド型** とする。もし、ある $t_0 > \rho$ に対し、

- (1) $\text{diam}(\partial B_t^+(p)) = O(t^\alpha)$, $\exists \alpha \in (0, 1)$, $t \rightarrow \infty$,
- (2) $g_v(w, w) \geq F(w)^2$, $\forall x \in M \setminus \overline{B_{t_0}^+(p)}$, $\forall v \in \mathcal{G}_p(x)$, $\forall w \in T_x M$

ならば、 M は有限位相型である。

更に、 F が可逆である場合、定理 4.7 よりも強い結果を引き出せる：

定理 4.10 ([KOT2, Theorem B]) $(\widetilde{M}, \tilde{\rho})$ をある唯一の $\rho \in (0, \infty)$ に対し $f'(\rho) = 0$ を満たす非コンパクト・マンゴルト回転面とする。この $(\widetilde{M}, \tilde{\rho})$ に対し、 (M, F, p) を $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) \geq G(t)$ を満たす前向き完備非コンパクト連結 n 次元 **可逆** フィンスラー多様体とする。もし、ある $t_0 > \rho$ に対し、

- (1) $\text{diam}(\partial B_t^+(p)) = O(t^\alpha)$, $\exists \alpha \in (0, 1)$, $t \rightarrow \infty$,
- (2) $g_v(w, w) \geq F(w)^2$, $\forall x \in M \setminus \overline{B_{t_0}^+(p)}$, $\forall v \in \mathcal{G}_p(x)$, $\forall w \in T_x M$,
- (3) $\mathcal{T}_M(v, w) = 0$, $\forall x \in M \setminus \overline{B_{t_0}^+(p)}$, $\forall v \in \mathcal{G}_p(x)$, $\forall w \in T_x M$,

ならば、 M は \mathbb{R}^n に微分同型である。特に、 $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) = G(t)$ である。

注意 4.11 仮定 (1) から (3) 以外の仮定について解説する。

- (a) 距離関数 d_p の臨界点は p の切断点であったが、逆に p の切断点が d_p の臨界点とは限らない。定理 4.10 の証明において、TCT を応用し p の切断跡が空集合であることを示すので、定理 4.7 における臨界点のそれとは違うテクニックを展開している。
- (b) F がリーマン構造の場合、定理 4.10 は、 $(\widetilde{M}, \tilde{\rho})$ が より一般の回転面モデル であっても成立する、すなわち、もし \widetilde{M} が $\int_1^\infty f(t)^{-2} dt = \infty$ を満たすとき、 M は n 次元回転面モデルと等長となる ([ST, Theorem 1.2])。同様の結果は、凸境界を持つリーマン多様体でも成立する ([KT4, Theorem 1.1])。
- (c) 定理 4.10 において、 f が $[\rho, \infty)$ 上で単調減少なので \widetilde{M} は $\int_1^\infty f(t)^{-2} dt = \infty$ を満たし、また $\mathcal{K}_p(\dot{\mu}(t)) = G(t)$ であることから、「 M が n 次元回転面モデルと等長である」ことを期待してしまう。しかしながら、それを示すには強烈な条件を付けないうり不可能に近いであろう：例えば、そのことを、全てのミンコフスキ空間とヒルベルト幾何学がそれぞれ $K_M \equiv 0$, $K_M \equiv -1$ を満たすことから理解出来るし、ブライアント ([B]) が構成した $K_M \equiv 1$ である非可逆フィンスラー構造を許容する \mathbb{S}^2 の族からも理解出来る。すなわち、これら定旗曲率を持つ空間はユニークではない。

参考文献

- [AG] U. Abresch and D. Gromoll, *On complete manifolds with nonnegative Ricci curvature*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), No. 2, 355–374.
- [BCS] D. Bao, S.-S. Chern, and Z. Shen, *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, Springer, New York (2000).
- [B] R. L. Bryant, *Projectively flat Finsler 2-spheres of constant curvature*, Selecta Math. (N.S.) **3** (1997), 161–203.
- [G] M. Gromov, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 179–195.
- [GS] K. Grove and K. Shiohama, *A generalized sphere theorem*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), 201–211.
- [K] K. Kondo, *Grove-Shiohama type sphere theorem in Finsler geometry*, arXiv:1302.6116
- [KO] K. Kondo and S. Ohta, *Topology of complete manifolds with radial curvature bounded below*, Geom. Funct. Anal. **17** (2007), 1237–1247.
- [KOT1] K. Kondo, S. Ohta, and M. Tanaka, *A Toponogov type triangle comparison theorem in Finsler geometry*, arXiv:1205.3913
- [KOT2] K. Kondo, S. Ohta, and M. Tanaka, *Topology of complete Finsler manifolds with radial flag curvature bounded below*, arXiv:1210.1774
- [KT1] K. Kondo and M. Tanaka, *Total curvatures of model surfaces control topology of complete open manifolds with radial curvature bounded below. I*, Math. Ann. **351** (2011), 251–266.
- [KT2] K. Kondo and M. Tanaka, *Total curvatures of model surfaces control topology of complete open manifolds with radial curvature bounded below. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 6293–6324.
- [KT3] K. Kondo and M. Tanaka, *Toponogov comparison theorem for open triangles*, Tohoku Math. J. **63** (2011), 363–396.
- [KT4] K. Kondo and M. Tanaka, *Applications of the Toponogov comparison theorem for open triangles*, Osaka J. of Math. **50** (2013), 541–562.
- [O] S. Ohta, *Splitting theorems for Finsler manifolds of nonnegative Ricci curvature*, to appear in J. Reine Angew. Math. arXiv:1203.0079
- [R] H.-B. Rademacher, *A sphere theorem for non-reversible Finsler metrics*, Math. Ann. **328** (2004), 373–387.
- [S1] Z. Shen, *Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry*, Adv. Math. **128** (1997), 306–328.
- [S2] Z. Shen, *Lectures on Finsler geometry*, World scientific publishing co., Singapore, 2001.
- [ST] K. Shiohama and M. Tanaka, *Compactification and maximal diameter theorem for noncompact manifolds with radial curvature bounded below*, Math. Z. **241** (2002), 341–351.
- [T] M. Tanaka, *On the cut loci of a von Mangoldt’s surface of revolution*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 631–641.
- [TK] M. Tanaka and K. Kondo, *The topology of an open manifold with radial curvature bounded from below by a model surface with finite total curvature and examples of model surfaces*, Nagoya Math. J. **209** (2013), 23–34.
- [TS] M. Tanaka and S. V. Sabau, *The cut locus and distance function from a closed subset of a Finsler manifold*, arXiv:1207.0918

佐々木・アインシュタイン多様体における 特殊ルジャンドル部分多様体の変形について

森山 貴之 (三重大学教育学部)

1 序

$(2n+1)$ 次元リーマン多様体 (M, g) に対し, その計量錐 $(C(M), \bar{g}) = (\mathbb{R}_{>0} \times M, dr^2 + r^2g)$ がケーラー多様体になるとき, (M, g) を佐々木多様体と言う. 更にそのリーマン計量 g がアインシュタイン計量である時に (M, g) は**佐々木・アインシュタイン多様体**と呼ばれる. これは計量錐 $(C(M), \bar{g})$ がリッチ平坦ケーラー多様体となる事と同値である. 更に M の部分多様体 X に対し, その錐 $C(X) = \mathbb{R}_{>0} \times X$ が $C(M)$ の特殊ラグランジュ部分多様体になるとき, X を**特殊ルジャンドル部分多様体**であると呼ぶ. 本講演では佐々木・アインシュタイン多様体における特殊ルジャンドル部分多様体の様々な変形についての結果を報告する.

2 主定理

2.1 特殊ルジャンドル部分多様体

M を単連結でコンパクトな $(2n+1)$ 次元多様体とする. M 上の接触形式 η とは $(d\eta)^n \wedge \eta \neq 0$ となる微分1-形式の事である. 接触形式 η に対し, $\eta(\xi) = 1, d\eta(\xi, \cdot) = 0$ となるベクトル場 ξ をレーブベクトル場といい, ξ が生成する線束 $\langle \xi \rangle$ から M 上に葉層構造 \mathcal{F}_ξ (レーブ葉層という) を誘導する.

命題 1 佐々木・アインシュタイン多様体 (M, g) において接触形式 η と複素 n 形式 ψ で以下を満たすものが存在する.

$$\begin{aligned}d\psi &= (n+1)\sqrt{-1}\eta \wedge \psi \\i_\xi \psi &= 0 \\ \psi \wedge d\eta &= 0 \\ \psi \wedge \bar{\psi} &= c_n \left(\frac{1}{2}d\eta\right)^n\end{aligned}$$

ここで $c_n = \frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right)^n$. □

命題における (ψ, η) は上の4つの条件に加え $(g, \psi, d\eta)$ の両立性 $g^T(\cdot, \cdot) = d\eta(\cdot, J_\psi \cdot)$ も満たす. 又, 逆にこの性質を満たす組 (ψ, η) の存在から M が佐々木・アインシュタインである事も従う. この様な (ψ, η) は $\theta \in \mathbb{R}$ による変換 $\psi \rightarrow e^{\sqrt{-1}\theta}\psi$ を除いて一意に決まる. そこでこの命題における組 (ψ, η) を一つ固定しよう.

さて、 M の部分多様体について考えるが、この講演では M の部分多様体 X とは埋め込み $\iota: X \hookrightarrow M$ の事とする。

命題 2 M の n 次元部分多様体 X が特殊ルジャンドル部分多様体となるための必要十分条件は $\iota^*\psi^{\text{Im}} = \iota^*\eta = 0$ である。 \square

これはカラビ・ヤウ多様体における特殊ラグランジュ部分多様体の特徴付けのアナロジーである。

2.2 特殊ルジャンドル部分多様体の変形

以後、 X はコンパクトとし、更に X, M は共に連結であると仮定する。埋め込み $f: X \hookrightarrow M$ が X の（法方向の）変形であるとは、以下を満たす埋め込み $f_t: X \hookrightarrow M$ の族 $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ が存在するときに言う：

$$f_0 = \iota, \quad f_1 = f, \quad \frac{d}{dt}f_t|_{t=0} \in \Gamma(NX)$$

ここで NX は X の M における法束である。微分形式の組 $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \bigoplus_{i=1}^m \wedge_M^{k_i}$ で $\iota^*\Phi = (\iota^*\varphi_1, \dots, \iota^*\varphi_m) = (0, \dots, 0)$ となるものを与えたとき、 X の変形 $f: X \hookrightarrow M$ が Φ -変形であるとは変形を定める族 $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ が

$$f_t^*\Phi = (f_t^*\varphi_1, \dots, f_t^*\varphi_m) = (0, \dots, 0)$$

を満たすときに言う。又、 X の Φ -変形全体の集合

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_X(\Phi) &= \{f: X \text{ の } \Phi\text{-変形, } C^\infty\text{級}\}, \\ \mathcal{M}_X^{s,\alpha}(\Phi) &= \{f: X \text{ の } \Phi\text{-変形, } C^{s,\alpha}\text{級}\} \end{aligned}$$

を X の Φ -変形モジュライ空間という。 X 自身も変形と見る事ができ、 $\mathcal{M}_X(\Phi)$ の元を定める。この変形を自明な変形と呼び、 $\mathcal{M}_X(\Phi)$ の元として 0_X と表す。

さて、命題 2 より、特殊ルジャンドル部分多様体 X の変形は (ψ^{Im}, η) -変形として捉えることができる。又、特殊ルジャンドル部分多様体としての変形のモジュライ空間は $\mathcal{M}_X(\psi^{\text{Im}}, \eta)$ となる。簡単のため、このモジュライ空間を \mathcal{M}_X と表す。この変形に対する X の無限小変形の空間は X 上の関数に対するラプラス作用素 Δ_0 の固有空間 $\text{Ker}(\Delta_0 - 2(n+1))$ と同型であることが分かる [1]。もし、 \mathcal{M}_X が滑らか（多様体構造を持つ）であれば接空間はこの無限小変形空間となる。しかし、一般に \mathcal{M}_X が滑らかかどうかは分からない。そこで $\mathcal{M}_X(\psi^{\text{Im}}, d\eta)$ を \mathcal{N}_X とし、 $\mathcal{M}_X(\eta)$ を \mathcal{L}_X と置くと、以下が成り立つ。

定理 1 モジュライ空間 \mathcal{M}_X は共通部分 $\mathcal{N}_X \cap \mathcal{L}_X$ であり、 $\mathcal{N}_X^{s,\alpha}$ と $\mathcal{L}_X^{s,\alpha}$ はそれぞれ滑らかである。 \square

更に \mathcal{N}_X には次のような 0_X を含む部分集合 \mathcal{N}_X^T が存在する。

定理 2 \mathcal{N}_X^T は 0_X において滑らかであり, その接空間は $H^1(X)$ と同型である. \square

この集合 \mathcal{N}_X^T はレーブ葉層 \mathcal{F}_ξ に対し横断的な方向の変形のみを考えることにより得られる変形の変形空間である. 定理 2 は「カラビ・ヤウ多様体における特殊ラグランジュ部分多様体の変形の変形空間は滑らかであり, その接空間は $H^1(X)$ と同型である」というマクリーンによる結果 [2] のアナロジーとしてみる事ができる.

3 更なる結果

では, 2 章の話をし少し拡張してみよう. そこでリーマン多様体 (M, g) で接触形式 η と複素 n 形式 ψ で

$$\begin{aligned} d\psi &= \kappa\sqrt{-1}\eta \wedge \psi \\ i_\xi\psi &= 0 \\ \psi \wedge d\eta &= 0 \\ \psi \wedge \bar{\psi} &= c_n\left(\frac{1}{2}d\eta\right)^n \end{aligned}$$

(と $(g, \psi, d\eta)$ の両立性) を満たすものが存在するとしよう. ここで κ はある実数である. この様な (ψ, η) は $\theta \in \mathbb{R}$ による変換 $\psi \rightarrow e^{\sqrt{-1}\theta}\psi$ を許す. この変換を位相 θ の位相変換と呼ぶ. 以後, 組 (ψ, η) を一つ固定しておこう. このとき, M には佐々木構造 (η, ξ, Φ, g) が誘導され, 付随するレーブ葉層 \mathcal{F}_ξ は横断的ケーラー・アインシュタインとなる. ここでアインシュタイン定数は 2κ である. 又, 実はこの様な組 (ψ, η) が存在する事と計量錐 $(C(M), \bar{g})$ が概カラビ・ヤウ多様体 (つまり, 至る所消えない正則 $(n+1)$ 形式 Ω とケーラー形式 ω が存在) で $\Omega \wedge \bar{\Omega} = r^{2(\kappa-n-1)}c_{n+1}\omega^{n+1}$ となる事と同値である. 特に $\kappa = n+1$ のときは (M, g) は佐々木・アインシュタイン多様体であり, $\kappa > 0$ のときは η -佐々木・アインシュタイン多様体と同値である事がわかる. 又, $\kappa = 0$ のときはコンタクト・カラビ・ヤウ多様体と呼ばれるものである [5].

3.1 自己同型群 $\text{Aut}(\psi, \eta)$

組 (ψ, η) を保つ微分同相全体の群 $\text{Aut}(\psi, \eta)$ について, いくつかの性質を見ておこう. まず, M 上の佐々木構造 (η, ξ, Ψ, g) を保つ微分同相全体の群 $\text{Aut}(\eta, \xi, \Psi, g)$ との関係について考える.

命題 3 $\text{Aut}(\eta, \xi, \Psi, g) = \{f \in \text{Diff}(M) \mid f^*\eta = \eta, f^*\psi = e^{\sqrt{-1}\theta}\psi, \theta \in \mathbb{R}\}$. \square

これにより $\text{Aut}(\eta, \xi, \Psi, g)$ は $\text{Aut}(\psi, \eta)$ を部分群として含むだけでなく, (ψ, η) の位相変換を引き起こす微分同相の群と一致する事が分かる.

次に $\text{Aut}(\psi, \eta)$ のリー環 $\mathfrak{aut}(\psi, \eta)$ について考えるが, $\mathfrak{aut}(\psi, \eta)$ は $\text{Ker}(\Delta_B - 4\kappa)$ と同型である. ここで Δ_B は葉層多様体 (M, \mathcal{F}_ξ) におけるベーシック (各葉に沿って一定) な関数全体に作用するベーシックラプラス作用素と呼ばれるものである. 更に次の関係が分かる:

命題 4 (i) $\kappa > 0$ のとき, $\mathfrak{aut}(\psi, \eta) \oplus \langle \xi \rangle_{\mathbb{R}} = \mathfrak{aut}(\eta, \xi, \Psi, g)$.

(ii) $\kappa < 0$ のとき, $\mathfrak{aut}(\psi, \eta) = \{0\}$, $\mathfrak{aut}(\eta, \xi, \Psi, g) = \langle \xi \rangle_{\mathbb{R}}$.

(iii) $\kappa = 0$ のとき, $\mathfrak{aut}(\psi, \eta) = \langle \xi \rangle_{\mathbb{R}} = \mathfrak{aut}(\eta, \xi, \Psi, g)$. □

最後に錘 $C(M) = \mathbb{R}_{>0} \times M$ における $\text{Aut}(\psi, \eta)$ の対応物を見ておこう. 計量錘 $(C(M), \bar{g})$ は概カラビ・ヤウ構造 (Ω, ω) を持つのであった. このとき, $\text{Aut}(\psi, \eta)$ の元を $\mathbb{R}_{>0}$ 方向に自明に拡張する事により, (Ω, ω) と r を保つ $C(M)$ の微分同相写像になる. ここで (Ω, ω, r) を保つ $C(M)$ の微分同相全体の群を $\text{Aut}(\Omega, \omega, r)$ と書くと, 逆に $\text{Aut}(\Omega, \omega, r)$ の元は M に $\text{Aut}(\psi, \eta)$ の元を誘導する.

3.2 (拡張された) 特殊ルジャンドル部分多様体の変形

特殊ルジャンドル部分多様体を $\iota^* \psi^{\text{Im}} = \iota^* \eta = 0$ を満たす M の部分多様体 $\iota: X \hookrightarrow M$ として定義する. これは錘 $C(X)$ が概カラビ・ヤウ多様体 $C(M)$ の特殊ラグランジュ部分多様体となる事と同値である. よって, X は (M, g) の極小ルジャンドル部分多様体である. さて, X を特殊ルジャンドル部分多様体とすると, $\mathcal{M}_X(\psi^{\text{Im}}, \eta)$ は X の特殊ルジャンドル変形のモジュライ空間である. これを \mathcal{M}_X と表すと, 定理 1 と定理 2 と同様の結果を示すことができる. 更に

定理 3 X の無限小変形の空間は $\text{Ker}(\Delta_0 - 2\kappa)$ と同型であり, $\kappa = 0$ のとき, X は剛性を持ち, \mathcal{M}_X は 1 次元多様体となる. 又, $\kappa < 0$ のときは X は自明な変形しか持たず, $\mathcal{M}_X = \{0_X\}$ となる. □

ここで特殊ルジャンドル部分多様体 X が剛性を持つとは X の全ての変形が $\text{Aut}(\psi, \eta)$ の元により誘導される事を言う. これは対応する特殊ラグランジュ錘 $C(X)$ の (特殊ラグランジュ錘としての) 変形が全て $\text{Aut}(\Omega, \omega, r)$ の元より誘導される事を意味する.

3.3 極小ルジャンドル部分多様体としての変形

では, $\kappa > 0$ の場合を考えてみよう. 実数 θ に対し, M の部分多様体 $\iota: X \hookrightarrow M$ が θ -特殊ルジャンドル部分多様体であるとは $\iota^*(e^{\sqrt{-1}\theta}\psi)^{\text{Im}} = \iota^*\eta = 0$ を満たすときに言う. つまり, 位相変換した組 $(e^{\sqrt{-1}\theta}\psi, \eta)$ についての特殊ルジャンドル部分多様体のことである. 次の命題は θ -特殊ルジャンドル部分多様体と極小ルジャンドル部分多様体と同値である事を意味する.

命題 5 連結で向き付け可能な n 次元部分多様体 $\iota : X \hookrightarrow M$ に対し, 以下は同値 :

(i) X は極小ルジャンドル部分多様体.

(ii) X は θ -特殊ルジャンドル部分多様体.

(iii) $d * \iota^* \psi^{\text{Im}} = \iota^* \eta = 0$. □

特に特殊ルジャンドル部分多様体は極小ルジャンドル部分多様体であり, 極小ルジャンドル部分多様体としての変形を考える事ができる. そこで命題の条件 (iii) を線形化することにより以下が従う.

命題 6 特殊ルジャンドル部分多様体 X の極小ルジャンドル部分多様体としての変形に対する無限小変形の空間は $\text{Ker}(\Delta_0 - 2\kappa) \oplus \mathbb{R}$ と同型である.

これは大仁田により η -佐々木・アインシュタイン多様体の極小ルジャンドル部分多様体の変形という観点から示されていた [4]. 又, 彼は同論文で剛性を持つ極小ルジャンドル部分多様体の例を構成した. ここで**極小ルジャンドル部分多様体が剛性を持つ**とは全ての極小ルジャンドル変形が群 $\text{Aut}(g, \eta)$ の元により誘導されるときに言う. このように特殊ルジャンドル部分多様体には2つの剛性を考える事ができる. しかし, これらは同値な概念である事が分かる :

定理 4 特殊ルジャンドル部分多様体が特殊ルジャンドル部分多様体として剛性を持つ事と極小ルジャンドル部分多様体として剛性を持つ事は同値である. □

参考文献

- [1] A. Futaki, K. Hattori and H. Yamamoto, *Self-similar solutions to the mean curvature flows on Riemannian cone manifolds and special Lagrangians on toric Calabi-Yau cones*, arXiv:1112.5933.
- [2] R. C. McLean, *Deformation of calibrated submanifolds*, Communications in Analysis and Geometry, **6**, (1998) 705–749.
- [3] T. Moriyama, *Deformations of special Legendrian submanifolds in Sasaki-Einstein manifolds*, arXiv:1306.2764.
- [4] Y. Ohnita, *On deformation of 3-dimensional certain minimal Legendrian submanifolds*, Proceedings of The Thirteenth International Workshop on Diff. Geom., **13**, (2009), 71–87.
- [5] A. Tomassini and L. Vezzoni, *Contact Calabi-Yau manifolds and special Legendrian submanifolds*, Osaka. J. Math. **45** (2008), no. 1, 127–147.

Hirzebruch 曲面上のスカラー曲率一定計量

大鳥羽 暢彦 (慶應義塾大学)*

各自然数 $m \geq 0$ に対して, Hirzebruch 曲面と呼ばれる複素曲面 Σ_m が定義される [Hir, 1951]. 各 m に対して Σ_m は $\mathbb{C}P^1$ 上の $\mathbb{C}P^1$ 束の構造を持ち, 0 番目と 1 番目の曲面 Σ_0 と Σ_1 は $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ と $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ にそれぞれ双正則同値である. 本講演では, 各 Hirzebruch 曲面 Σ_m 上にスカラー曲率一定計量の族を構成する ($m \geq 1$). これらの計量は, $\Sigma_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ 上の自然な直積計量を一般化する.

1. Hirzebruch 曲面とその上のスカラー曲率一定計量

この節では, Hirzebruch 曲面の定義とその分類定理について述べた後 (§1.1), 講演者がそれらの上に構成した計量の最も基本的な性質を紹介する (§1.2).

1.1. Hirzebruch 曲面 Σ_m

Hopf 束の射影を $p : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ と書く. p は 3 次元球面 $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ の点 (z, w) を複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ の点 $[z : w]$ に写す射影である. 円周群 $S^1 = \{e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ の S^3 への自由な右作用 $(z, w) \cdot e^{2\pi i\theta} = (ze^{-2\pi i\theta}, we^{-2\pi i\theta})$ の軌道は射影 p のファイバーに一致しており, Hopf 束は S^1 を構造群とする主束である.

$\mathbb{C}P^1$ 上の主 S^1 束の同型類全体は \mathbb{Z} に同型な加法群を成し [KobS], Hopf 束 S^3 はその加法群において $1 \in \mathbb{Z}$ に対応する. 2 以上の整数 m に対応する主 S^1 束は, Hopf 束の構造群 S^1 に埋め込まれた m 次巡回群 $\{e^{2\pi i(l/m)} \mid l = 0, 1, \dots, m-1\} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ によって S^3 を割ることで得られる, レンズ空間 $mS^3 := S^3 / (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ である. また, 自明束 $\mathbb{C}P^1 \times S^1$ はその加法群の中で 0 の役割を担うので, これを $0S^3 := \mathbb{C}P^1 \times S^1$ と書く.

円周群 S^1 が 2 次元球面 S^2 に (回転によって) 効果的に作用しているとし, この作用に関して, 主 S^1 束 mS^3 に付随する S^2 束 $\Sigma_m := (mS^3) \times_{S^1} S^2$ を考える ($m \geq 0$). Σ_m の底空間 $\mathbb{C}P^1$ とファイバー $S^2 \cong \mathbb{C}P^1$ の可積分な概複素構造は, 全空間 Σ_m 上の可積分な概複素構造 J_m を定義する¹. 複素曲面 (Σ_m, J_m) を m 番目の **Hirzebruch 曲面** と呼び, その射影を $\pi_m : \Sigma_m \rightarrow \mathbb{C}P^1$ と書く. 0 番目の曲面が $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ であることは見やすい. また, 1 番目の曲面は $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ と双正則同値であることが確かめられる (なお, $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ は複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ と逆向きの複素射影平面 $\overline{\mathbb{C}P^2}$ の連結和である).

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2, 3, \dots$
主 S^1 束	自明束 $\mathbb{C}P^1 \times S^1$	Hopf 束 S^3	レンズ空間 mS^3
Hirzebruch 曲面	$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$	$\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$	$\Sigma_m = (\Sigma_m, J_m)$
Riemann 計量	$g_0(R) = g_{FS} \oplus \frac{8}{R-8} g_{FS}$	$g_1(R)$	$g_m(R)$

Hirzebruch は, 複素曲面 Σ_m の双正則同値類と微分同相類を次のように決定した [Hir]: Σ_m と $\Sigma_{m'}$ が双正則同値ならば $m = m'$ であり, Σ_m と $\Sigma_{m'}$ が微分同相なのは, m と m' の偶奇が等しいとき, かつそのときに限る. その結果から, (複素構造を忘れた) 2 つの滑らかな多様体 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ と $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上に, それぞれ可算無限個の複素構造 J_m および $\mathbb{C}P^1$ 束の構造 π_m が定まっていることになる (m はそれぞれ偶もしくは奇である).

* 〒 223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1 慶應義塾大学 大学院理工学研究科 後期博士課程一年, 日本学術振興会特別研究員 (DC1)

e-mail: otoba@math.keio.ac.jp

¹ J_m の定義には Σ_m 上の S^1 接続を用いるが, J_m は S^1 接続の取り方に依存しない.

1.2. Σ_m 上のスカラー曲率一定計量 $g_m(R)$

0 番目の Hirzebruch 曲面 $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ には, $\mathbb{C}P^1$ 上の Fubini-Study 計量 g_{FS} を直積して得られる自然な計量 $g_{FS} \oplus r^2 g_{FS}$ がある ($r > 0$). これらの計量は Kähler 計量であると同時に, 次の2つの性質を持つ: (1) スカラー曲率が一定である. (2) 直積計量であるという意味において, Σ_0 のファイバー束の構造を尊重する. これらの性質に注目して, 講演者は一般の Hirzebruch 曲面 Σ_m 上に次のような Riemann 計量を構成した.

定理 1. 各自然数 $m \geq 1$ と各実数 $R \in \mathbb{R}$ に対して, Hirzebruch 曲面 Σ_m 上の共形 Kähler 計量 $g_m(R)$ であって, 次の2つの性質を満たすものが存在する.

- (a) $g_m(R)$ のスカラー曲率は一定であり, その値は R に等しい.
- (b) Hirzebruch 曲面の射影 $\pi_m : (\Sigma_m, g_m(R)) \rightarrow (\mathbb{C}P^1, g_{FS})$ は, 全測地的ファイバーを持つ Riemann 沈め込みである². ■

性質 (a) と (b) は, Ehresmann 接続のホロノミーに関する仮定の下で計量 $g_m(R)$ を特徴付ける (定理 3) という意味において, $g_m(R)$ の最も基本的な性質である.

$\Sigma_0 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ 上の直積計量も統一的に $g_0(R) = g_{FS} \oplus \frac{8}{R-8} g_{FS}$ と書くことにする ($R > 8$). 定理 1 における $g_m(R)$ の性質を $g_0(R)$ も持つ一方で, $m = 0$ のときと $m > 0$ のときでは, 以下に述べるような違いがある. まず, $g_0(R)$ は各 R に対して Kähler であり, かつ $R = 16$ のときは Einstein でもあるが, $m > 0$ ならば $g_m(R)$ は Kähler でも Einstein でもない. 次に, $g_0(R)$ のスカラー曲率の値 R は負になり得ないが, $m > 0$ ならば R は任意の実数値をとる. 最後に, $\pi_0 : (\Sigma_0, g_0(R)) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ のファイバーには定曲率計量が定まっているが, $m > 0$ ならば $\pi_m : (\Sigma_m, g_m(R)) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ のファイバーには Gauss 曲率が一定でない回転対称計量が定まっている (§2 参照). ファイバーの負の Gauss 曲率が, 全空間 Σ_m の負のスカラー曲率に貢献する.

2. 計量 $g_m(R)$ の構成について

Page が Einstein 計量を $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ に構成した後 [Pag, 1978], Bérard-Bergery はその構成を数学の言葉に翻訳しただけではなく, 余等質性 1 の Riemann 幾何の視点から, Page 計量の特徴付けと一般化を行った [Ber, 1982]. その結果を利用して, 幾何構造に高い対称性を仮定して常微分方程式系に帰着することで, Einstein-Weyl 構造 [MPPS, 1997] や extremal Kähler 計量 [HS, 1997] が構成されている.

スカラー曲率一定計量 $g_m(R)$ も Bérard-Bergery の枠組みの中で記述できる. 上の段落に述べた2つの幾何構造を構成するためには複雑な常微分方程式系を解く必要があるが, $g_m(R)$ の場合には, 計量の構成は次のように比較的単純な常微分方程式の自由境界値問題

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -m^2 f^3 - \frac{R-8}{2} f, \quad (2.1)$$

² 全測地的ファイバーを持つ Riemann 沈め込みは, 直積 Riemann 多様体の射影 $(B, \hat{g}) \times (F, \hat{g}) \rightarrow (B, \hat{g})$ を非自明束に一般化した概念であり, 次のように定義される. 2つの Riemann 多様体の間の滑らかな全射 $\pi : (M, g) \rightarrow (B, \hat{g})$ が Riemann 沈め込みであるとは, 次が成り立つことである: 任意の $x \in M$ に対し, π の微分 $d\pi_x$ を $d\pi_x$ の核の g に関する直交補空間 $(\text{Ker } d\pi_x)^\perp$ に制限すると, 等長線型同型写像である. Riemann 沈め込み π が全測地的ファイバーを持つとは, 任意の $\tilde{x} \in B$ に対し, その逆像 $\pi^{-1}(\tilde{x})$ が (M, g) に全測地的な部分多様体として埋め込まれていることである. このとき, B の連結性と g の完備性の仮定の下で, π のファイバーは全て互いに等長的であることが知られている [Herm, 1960].

$$f(\pm T) = 0, \quad \frac{df}{dt}(-T) = 1, \quad \frac{df}{dt}(T) = -1$$

に帰着される. $f(t)$ は Σ_m のファイバー S^2 上に回転対称計量 $f^2(t)d\theta^2 + dt^2$ を定める関数である. この境界値問題には任意の $m > 0$ と $R \in \mathbb{R}$ に対して一意な解が存在し, さらに, その解のべき乗の定積分 $\int_{-T}^T f^l(t)dt$ を, m と R に関する初等関数および楕円積分で表すことができる ($l = 0, 1, \dots$). 例えば

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{2m^2 + \beta^2}} K(k), \quad \int_{-T}^T f(t)dt = 2\sqrt{2} \operatorname{Arcsin}(k) \quad (2.2)$$

などと書ける. ただし,

$$\beta = -\frac{R-8}{2}, \quad k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{2m^2 + \beta^2}} \right), \quad K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

である. これらの積分公式は計量 $g_m(R)$ の解析に用いられる (§3).

3. 計量 $g_m(R)$ の山辺汎関数と Weyl 汎関数の値

この節では, 定理 1 の計量 $g_m(R)$ のより詳しい性質について述べる.

定理 2. 計量 $g_m(R)$ の山辺汎関数と Weyl 汎関数の値は, それぞれ

$$Y(g_m(R)) = R\sqrt{\operatorname{Vol}(g_m(R))} = 2\sqrt[4]{2\pi}R\sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin}(k)}{m}},$$

$$\int_{\Sigma_m} |W|^2 d\operatorname{Vol} = \frac{2\pi^2}{m} \left(72m^2 + \frac{59}{3}R^2 - 272R + 960 \right) \sqrt{2} \operatorname{Arcsin}(k) - 4\pi^2(19R - 120)$$

と表される. ただし, $|W|$ は $g_m(R)$ の Weyl 曲率のテンソルノルムである. ■

$m > 0$ のときはスカラー曲率の値 R が 0 になり得るので, Böhm, Wang, Ziller の議論 [BWZ, 2004] が適用できて, $g_m(R)$ のうち $R > 0$ が十分 0 に近い計量は正の山辺計量であることが分かる. どの $g_m(R)$ が正の山辺計量であるか判定することはできていないが, 計量の安定性に関して次のようなことが分かった.

計量 $g_m(R)$ の山辺汎関数に関する安定性について

4次元の場合, スカラー曲率一定計量 g が山辺汎関数に関する安定性を持つことは, g のスカラー曲率 R とラプラシアン の最小固有値 λ_1 の間に不等式 $\lambda_1 \geq R/3$ が成立することと同値である [KobO]. 計量 $g_m(R)$ の λ_1 は次のように評価できるので, いくつかの計量の安定性を判定することができる. まず, 射影 $\pi_m : \Sigma_m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ が全測地的ファイバーを持つ Riemann 沈め込みであることから, 全空間, 底空間およびファイバーのラプラシアン の最小固有値

$$\lambda_1 = \lambda_1(\Sigma_m, g_m(R)), \quad \check{\lambda}_1 = \check{\lambda}_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, g_{\text{FS}}) = 8, \quad \hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_1(S^2, f^2(t)d\theta^2 + dt^2)$$

は次の不等式

$$\min\{8, \hat{\lambda}_1\} \leq \lambda_1 \leq 8 \quad (3.1)$$

を満たすことが分かる ([BB, 1982], [Bor, 2006]). 一方 $\hat{\lambda}_1$ は, Cheeger の等周不等式 [Che, 1970] と Hersch の不等式 [Hers, 1970] を使うと, ファイバー $(S^2, f^2(t)d\theta^2 + dt^2)$ の等周

定数 h と面積 a を用いて $\frac{1}{4}h^2 \leq \hat{\lambda}_1 \leq \frac{8\pi}{a}$ と評価できる. さらに, Ritoré の回転対称計量に関する結果 [Rit, 2001] から $h = 4T/a$ が従う. T と $a = 2\pi \int_{-T}^T f(t)dt$ は m および R で書けるので (積分公式 (2.2)), 結局

$$\frac{1}{8\pi^2 \sqrt{2m^2 + \beta^2}} \frac{K^2(k)}{\text{Arcsin}^2(k)} \leq \hat{\lambda}_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{\text{Arcsin}(k)} \quad (3.2)$$

を得る. 不等式 (3.1) と (3.2) より次のことが観察される: スカラー曲率 R の値が大きすぎると $g_m(R)$ の山辺汎関数に関する安定性が崩れる一方, m が十分大きいときは, $R \leq 5$ ならば $g_m(R)$ は安定である.

計量 $g_m(R)$ の Bach テンソルについて

定理 2 の式を用いて各 m ごとに Weyl 汎関数のグラフを描くと, R 方向に臨界点が現れていることが観察される. このことから, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 上の extremal Kähler 計量の場合と同様に [HS], $g_m(R)$ の中に Bach 平坦な計量が含まれていると期待された. しかしながら, Derdziński の公式 [Der, 1983] を用いて Bach テンソルの計算を進めると, $g_m(R)$ のいずれも Bach 平坦でないことが確かめられる. 実は, 計量 $g_m(R)$ のいずれも, 曲率に関する 2 次の汎関数の臨界点ではない (すなわち, Gursky と Viaclovsky の言葉 [GV, 2013] を借りると, $g_m(R)$ の中に B^t -平坦な計量は含まれていない).

4. 計量 $g_m(R)$ の一般化と特徴付け

底空間が $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ でなくとも,

- 境界のない多様体 B ,
- B 上のスカラー曲率一定計量 \check{g} ,
- B 上の整かつ閉な微分 2 形式 $\check{\Omega}$ であって, 計量 \check{g} に関するノルム $|\check{\Omega}|$ が一定なもの

の 3 つがあれば, $\check{\Omega}$ の de Rham コホモロジー類に対応する B 上の主 S^1 束に付随する S^2 束の上に, スカラー曲率一定計量の族が定まる. 計量の構成は (2.1) と同様の常微分方程式

$$f'' = -\frac{|\check{\Omega}|^2}{2} f^3 - \frac{R - \check{R}}{2} f \quad (4.1)$$

の境界値問題に帰着され, 山辺汎関数の値の計算とラプラシアン の最小固有値の評価が可能である. なお, 定理 1 の計量 $g_m(R)$ の場合は, $B = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, $\check{g} = g_{FS}$, そして $\check{\Omega}$ は g_{FS} の面積形式の m 倍になっている.

常微分方程式 (4.1) が全空間の Ehresmann 接続と底空間の計量に制約を加えていることが観察されるので, $g_m(R)$ の次のような特徴付けが得られる.

定理 3. Hirzebruch 曲面 Σ_m 上の Riemann 計量 g が, 次の性質を満たすとす.

- (A) g のスカラー曲率は一定である.
- (B) $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ 上のある計量 \check{g} が存在して, Hirzebruch 曲面の射影 $\pi_m : (\Sigma_m, g) \rightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \check{g})$ は全測地的ファイバーを持つ Riemann 沈め込みになる.

このとき, もし Ehresmann 接続 $(\text{Ker } d\pi_m)^\perp$ のホロノミー群が高々 1 次元ならば, \check{g} と g はそれぞれ g_{FS} と $g_m(R)$ に定数倍を除いて一致する. ■

全測地的ファイバーを持つ Riemann 沈め込みに関する Hermann の基本的な仕事 [Herm, 1960] と Vilms の観察 [Vil, 1970] などにより, 定理 3 の仮定 (B) の下で, Ehresmann 接続 $(\text{Ker } d\pi_m)^\perp$ のホロノミー群は S^2 に等長的に作用するような (従って, 高々 3 次元のコンパクトな) 連結 Lie 群であることが分かる. 講演者はホロノミー群が 2 次元や 3 次元の場合にもスカラー曲率一定計量が現れるかどうかについて興味を持っている.

参考文献

- [Ber] Bérard-Bergery, Lionel. Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein. Institut Élie Cartan, 6, 1–60, Inst. Élie Cartan, 6, Univ. Nancy, Nancy, 1982.
- [BB] Bérard-Bergery, Lionel; Bourguignon, Jean-Pierre. Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibres. *Illinois J. Math.* 26 (1982), no. 2, 181–200.
- [BWZ] Böhm, C.; Wang, M.; Ziller, W. A variational approach for compact homogeneous Einstein manifolds. *Geom. Funct. Anal.* 14 (2004), no. 4, 681–733.
- [Bor] Bordononi, Manlio. Spectra of submersions. *Contemporary geometry and related topics*, 51–62, Univ. Belgrade Fac. Math., Belgrade, 2006.
- [Che] Cheeger, Jeff. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. In *Problems in Analysis*, pp. 195–199. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970.
- [Der] Derdziński, Andrzej. Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four. *Compositio Math.* 49 (1983), no. 3, 405–433.
- [GV] Gursky, Matthew J.; Viaclovsky, Jeff A. Critical metrics on connected sums of Einstein four-manifolds. arXiv:1303.0827 [math.DG].
- [Herm] Hermann, Robert. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle. *Proc. Amer. Math. Soc.* 11 (1960), 236–242.
- [Hers] Hersch, Joseph. Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 270 (1970).
- [Hir] Hirzebruch, Friedrich. Über eine Klasse von einfachzusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 124 (1951), 77–86.
- [HS] Hwang, Andrew D.; Simanca, Santiago R. Extremal Kähler metrics on Hirzebruch surfaces which are locally conformally equivalent to Einstein metrics. *Math. Ann.* 309 (1997), no. 1, 97–106.
- [KobO] Kobayashi, Osamu. 山辺の問題について. *Seminar on Mathematical Sciences*, 16. Keio University, Department of Mathematics, Yokohama, 1990.
- [KobS] Kobayashi, Shoshichi. Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group. *Tôhoku Math. J. (2)* 8 (1956), 29–45.
- [MPPS] Madsen, Anders Bisbjerg; Pedersen, Henrik; Poon, Yat Sun; Swann, Andrew. Compact Einstein-Weyl manifolds with large symmetry group. *Duke Math. J.* 88 (1997), no. 3, 407–434.
- [Oto] Otoba, Nobuhiko. Constant scalar curvature metrics on Hirzebruch surfaces. In preparation.
- [Pag] Page, Don. A compact rotating gravitational instanton. *Physics Letters B*, Volume 79, Issue 3, p. 235–238.
- [Rit] Ritoré, Manuel. Constant geodesic curvature curves and isoperimetric domains in rotationally symmetric surfaces. *Comm. Anal. Geom.* 9 (2001), no. 5, 1093–1138.
- [Vil] Vilms, Jaak. Totally geodesic maps. *J. Differential Geom.* 4 (1970), 73–79.

Long-term properties of Markov processes on a measure space in terms of Green's formula

正宗淳

東北大学大学院情報科学研究科

1 背景：多様体の再帰性と保存性について知られていること

M を境界がない連結なリーマン多様体とする。 M は正のグリーン関数を許容しないとき、再帰的であると呼ばれ、また、 M の熱核 k が

$$\int_M k(t, x, y) \mu(dy) \equiv 1, \quad \forall t > 0,$$

を持たすとき、保存的と呼ばれる。再帰性は保存性を導くが、逆は一般には成立しない。例えば、任意の次元のユークリッド空間 \mathbb{R}^n は保存的であるが、再帰的であるのは、次元が1もしくは2の場合に限ることが知られている。本講演の主目的は、多様体の保存則および再帰性、さらに、その一般化である測度空間のディリクレ形式の保存則および再帰性について議論することである。

完備多様体の場合には、A. Grigor'yan [2] が多様体の無限遠における測度増加を表す関数：

$$V(r) = \mu(B(x_0, r))$$

($B(x_0, r)$ は x_0 を中心とした半径 $r > 0$ の開球を表す) を用いた次の十分条件を与えている。

定理 1 ([2]) 完備多様体 M に対して、次が成立する。

$$\int_0^\infty \frac{r dr}{V(r)} = \infty \Rightarrow \text{再帰性} \quad (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{r dr}{\log V(r)} = \infty \Rightarrow \text{保存性} \quad (2)$$

(1) が成立する条件としては、 $V(r) \leq Cr^2$ 、また、(2) が成立する条件としては、 $V(r) \leq \exp(Cr^2)$ がある。非完備多様体の場合には、P. Li と G. Tian [10] による次の結果がある。

定理 2 ([10]) V を $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ 内の代数多様体 M 、 $\Sigma \subset V$ を特異集合とする。リーマン多様体 $V \setminus \Sigma$ が保存的なのは、 Σ の実余次元が1と2の場合に限る。

この結果は一般の非完備多様体に拡張される。即ち、リーマン距離 d による M の完備化を (\overline{M}, d) として、コーシー境界 $\partial_C M$ を

$$\partial_C M = \overline{M} \setminus M$$

で定義すると、有界なコーシー境界が概極であるとき、(1) と (2) はそれぞれ再帰性と保存性を導く。特に、Li-Tian の条件はコーシー境界が概極であるための必要充分条件であることから、彼らの多様体は再帰的であることが分かる。再帰性や保存性が崩れる要因は以下の二つに絞られる：

- $V(r)$ の無限遠での挙動,
- コーシー境界 $\partial_C M$ の非概極性.

次節において, 再帰性と保存性のグリーンの公式による特徴付けを述べる.

2 新しい結果：再帰性と保存性のグリーンの公式による特徴付け

2.1 多様体に対する結果 [4]

この節の結果は [4] において得られた.

定理 3 多様体 M が再帰的であるための必要十分条件は, $\Delta u \in L^1$ を満たす全ての $u \in L^\infty$ に対して,

$$\int_M \Delta u = 0 \quad (3)$$

が成立することである.

例えば, \mathbb{R}^n の有界領域 M と任意の $u \in C^2(\overline{M})$ に対しては, グリーンの公式により,

$$\int_M \Delta u = \int_{\partial M} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$$

が成立するが, ディリクレ境界条件の為に (3) は成り立たないことが分かる. 一方, 保存性に対しては以下の結果を得た. $D(\Delta_D) = \{u \in W_0^{1,2} \mid \Delta u \in L^2\}$ とする.

定理 4 多様体 M が保存的であるための必要十分条件は, $\Delta u \in L^1$ を満たす全ての $u \in D(\Delta_D) \cap L^1$ に対して,

$$\int_M \Delta u = 0 \quad (4)$$

が成立することである.

完備多様体に対しては, 次が成立する.

定理 5 完備多様体 M が保存的であるための必要十分条件は, $\Delta u \in L^1$ と $\nabla u \in L^2$ を満たす全ての $u \in L^1 \cap L^2$ に対して,

$$\int_M \Delta u = 0 \quad (5)$$

が成立することである.

この定理の仮定における“完備性”を“コーシー境界が概極”にかえると, 結果は正しくない.

2.2 測度空間に対する結果 [5]

この部分説では, 前部分説において述べたリーマン多様体に関する結果を, 測度空間の正則ディリクレ形式に拡張する. ここで述べる結果は, [5] において得られた.

(X, μ) を σ -有限測度空間, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を $L^2 = L^2(X, \mu)$ 上の対称ディリクレ形式とする. まず, $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対する生成作用素 Δ を拡張する. 任意の $n \geq 1$ に大して $u^{(n)} = (n \wedge u) \vee (-u)$ とおき,

$$\mathcal{F}_{loc}^\infty = \{u \in L^0 \mid u^{(n)} \in \mathcal{F}_{loc}, \forall n \geq 1\}$$

と

$$\hat{\mathcal{E}}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(u^{(n)}), \quad \hat{\mathcal{F}} = \{u \in \mathcal{F}_{loc}^\infty \mid \hat{\mathcal{E}}(u) < \infty\}.$$

とする。さらに,

$$D(\hat{\Delta}) = \{u \in \hat{\mathcal{F}} \mid \exists f \in L^1_{loc} \text{ such that } \hat{\mathcal{E}}(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2}, \forall v \in \hat{\mathcal{F}} \cap C_0\}$$

と

$$\hat{\Delta}u = f$$

とおく。このとき,

定理 6 デイリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が再帰的であるための必要充分条件は, $\hat{\Delta}u \in L^1$ を満たす任意の $u \in D(\hat{\Delta})$ に対して,

$$\int_X \hat{\Delta}u \, d\mu = 0 \tag{6}$$

が成立することである。

定理 7 デイリクレ形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が保存的であるための必要充分条件は, $\hat{\Delta}u \in L^1 \cap L^2$ を満たす任意の $u \in D(\hat{\Delta}) \cap L^1 \cap L^2$ に対して,

$$\int_X \hat{\Delta}u \, d\mu = 0 \tag{7}$$

が成立することである。

この設定においても, 定理 4 の類似, 即ち, $D(\Delta_D)$ を $D(\Delta)$ にかえた主張が成立することに注意する。

注意 8 飛躍測度 j を用いて,

$$\mathcal{E}(u, v) = \iint_{X \times X \setminus \{\text{diag}\}} (u(x) - u(y))^2 j(x, dy) \mu(dx)$$

と表されるデイリクレ形式の再帰性と保存則が成立するための測度関数 $V(r)$ の十分条件は, [8, 3, 9, 11] において得られた。特に, X がグラフの場合にはシャープな結果が [1, 6, 7] において得られている。

参考文献

- [1] M. Folz, *Volume growth and stochastic completeness of graphs*, to appear in Trans. Am. Math. Soc.
- [2] A. Grigor'yan, *On conservative manifolds*, Soviet Math. Dokl. **34** (2) (1987) 310-313, translated from Russian Dokl. Akad. Nauk SSSR **290** (3) (1986) 534-537.
- [3] A. Grigor'yan, X.-P. Huang, and J. Masamune, *On stochastic completeness of jump processes*, Math Z. **271** (2012), no. 3-4, 1211-1239
- [4] A. Grigor'yan and J. Masamune, *Parabolicity and conservativeness of manifolds in terms of the Green formula*, to appear in J. Math. Pures Appl.
- [5] S. Haeseler, M. Keller, D. Lenz, J. Masamune, and H.M. Schmidt, *Note on stochastic completeness and recurrence for Dirichlet forms*, in preparation.
- [6] X. Huang, *A Note on the Volume Growth Criterion for Stochastic Completeness of Weighted Graphs*, to appear in Potential Anal.

- [7] X. Huang and Y. Shiozawa, *Upper escape rate of Markov chains on weighted graphs*, preprint. arXiv:1304.6197.
- [8] J. Masamune and T. Uemura, *Conservation property of symmetric jump processes*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat, **47** (2011) no. 3, 650-662
- [9] J. Masamune, T. Uemura, and J. Wang, *On the conservativeness and recurrence of symmetric jump-diffusions*, J. Funct. Anal., 263 (2012), no. 12, 3984-4008.
- [10] P. Li and G. Tian, *On the heat kernel of the Bergmann metric on algebraic varieties*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 4, 857-877.
- [11] Y. Shiozawa, *Conservation property of symmetric jump-diffusion processes*, to appear in Forum Math.

複素双曲空間内の等質 Ricci soliton 超曲面*

久保 亮 (広島大学大学院理学研究科 D2)†

概要

非コンパクト型対称空間への特異軌道を持たない余等質性 1 作用の軌道は Lie 超曲面と呼ばれる。本講演では、複素双曲空間内の Lie 超曲面の内、Ricci soliton であるものの分類結果について述べる。尚、本講演の内容は広島大学の田丸博士氏、橋永貴弘氏との共同研究に基づく。

1 導入

我々は非コンパクト型対称空間内の等質部分多様体の幾何に興味を持っている。本講演では特に Lie 超曲面と呼ばれる等質超曲面について扱う。

定義 1.1. 非コンパクト型対称空間への特異軌道を持たない余等質性 1 作用の軌道を **Lie 超曲面** という。

Lie 超曲面は非コンパクト型対称空間内の等質超曲面の典型例を供給する。また Lie 超曲面は可解 Lie 群に適当な左不変計量を入れた空間と等長的であることから、その幾何を調べることは Lie 群上の左不変幾何構造の研究という観点からも有益である。

今回、我々は複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n (n \geq 2)$ 内の Lie 超曲面で Ricci soliton であるものの分類を行った。ここで Riemann 多様体 (M, g) が **Ricci soliton** であるとは、定数 $c \in \mathbb{R}$ および完備ベクトル場 $X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して、Ricci テンソル ric_g が次を満たすことである：

$$\text{ric}_g = cg + \mathcal{L}_X g. \quad (1.1)$$

本講演の主定理は次である。

定理 1.2 ([4]). $\mathbb{C}H^n$ 内の Lie 超曲面 M が Ricci soliton であるための必要十分条件は、

- (i) M はホロ球面に等長的合同、または、
- (ii) $n = 2$ かつ、 M は等質極小線織超曲面に等長的合同。

* 第 60 回幾何シンポジウム (2013/08/24-27, 東京工業大学) 講演予稿

† E-mail: akira-kubo@hiroshima-u.ac.jp

2 Lie 超曲面

ここでは, Lie 超曲面について説明する.

まず一般の既約非コンパクト型対称空間 G/K の場合に説明する. $G = KAN$ を岩澤分解, $S := AN$ を岩澤分解の可解部分とする (このとき S は単連結可解 Lie 群で, G/K に単純推移的に作用する). 次の定理から, G/K 内の Lie 超曲面を考える上では S の余次元 1 Lie 部分群が重要な役割を果たす.

定理 2.1 ([2]). G/K への特異軌道を持たない余等質性 1 作用は, S の余次元 1 Lie 部分群による作用と軌道同値である (したがって, G/K 内の Lie 超曲面は, S の余次元 1 Lie 部分群による軌道と等長的合同である).

次に複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n = \mathrm{SU}(1, n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n))$ 内の Lie 超曲面について説明する. S を $\mathrm{SU}(1, n)$ の岩澤分解の可解部分, \mathfrak{s} をその Lie 代数とする. このとき \mathfrak{s} には次の関係式を満たす基底 $\{A_0, X_1, Y_1, \dots, X_{n-1}, Y_{n-1}, Z_0\}$ が存在する:

$$[A_0, X_i] = (1/2)X_i, [A_0, Y_i] = (1/2)Y_i, [A_0, Z_0] = Z_0, [X_i, Y_i] = Z_0. \quad (2.1)$$

また \mathfrak{s} には上記の基底を正規直交とする内積 \langle, \rangle を入れる (このとき, S に \langle, \rangle に対応する左不変計量を入れた空間は $\mathbb{C}H^n$ と等長的になる). 以上を用いて S の余次元 1 Lie 部分群 $S(\theta)$ を構成する.

定義 2.2. $\theta \in [0, \pi/2]$ に対して, 可解 Lie 代数 $\mathfrak{s}(\theta)$ を次で定義する:

$$\mathfrak{s}(\theta) := \mathfrak{s} \ominus (\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)A_0). \quad (2.2)$$

ここで \ominus は上で定めた内積 \langle, \rangle に関する直交補空間を表す. また $S(\theta)$ を $\mathfrak{s}(\theta)$ に対応する S の連結 Lie 部分群とする.

$\mathbb{C}H^n$ への特異軌道を持たない余等質性 1 作用は $S(0)$ -作用, $S(\pi/2)$ -作用のいずれかに軌道同値である (特に, o を $\mathbb{C}H^n$ の原点とするとき, 原点軌道 $S(0).o$, $S(\pi/2).o$ はそれぞれ等質極小線織超曲面, ホ口球面と呼ばれる). 更にそれぞれの軌道については次が知られている:

- $S(0)$ の各軌道は $S(\theta).o$ ($\theta \in [0, \pi/2)$) に等長的合同である.
- $S(\pi/2)$ の各軌道は互いに等長的合同である.

以上をまとめると次が得られる:

定理 2.3 ([1]). $\mathbb{C}H^n$ 内の Lie 超曲面 M に対して, ある $\theta \in [0, \pi/2]$ が存在して, M は $S(\theta).o$ に等長的合同である.

したがって, $\mathbb{C}H^n$ 内の Lie 超曲面の幾何を調べるためには $S(\theta).o$ ($\theta \in [0, \pi/2]$) について調べれば十分である.

3 主定理の証明の概略

ここでは主定理の証明の概略を述べる. Lie 超曲面 $S(\theta).o$ は, 可解 Lie 群 $S(\theta)$ に然るべき左不変計量を入れた空間と等長的である. 特に, $S(\theta)$ が完全可解であることから, 次の定理が適用できる.

定理 3.1 ([5]). G を単連結 Lie 群, g を G 上の左不変計量とする. このとき, G が完全可解であるならば, (G, g) が Ricci soliton であることと, 代数的 Ricci soliton であることは同値である.

ここで, 単連結 Lie 群 (G, g) が 代数的 Ricci soliton であるとは, 定数 $c \in \mathbb{R}$ および $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して, Ricci 作用素 Ric_g が次を満たすことである:

$$\text{Ric}_g = c \cdot \text{id} + D. \quad (3.1)$$

定理 5 により, 主定理の証明をするためには $S(\theta)$ が代数的 Ricci soliton であるかどうかを調べればよい. 特に, $S(\theta)$ の Ricci 作用素は [3] で明示的に計算されているので, $\text{Der}(\mathfrak{s}(\theta))$ について調べることで主定理を得る.

参考文献

- [1] J. Berndt, Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces, *Math. Z.*, **229** (1998), 589–600.
- [2] J. Berndt & H. Tamaru, Homogeneous codimension one foliations on noncompact type symmetric spaces, *J. Differential Geom.*, **63** (2003), no. 1, 1–40.
- [3] T. Hamada, Y. Hoshikawa & H. Tamaru, Curvature properties of Lie hypersurfaces in the complex hyperbolic space, *J. Geom.*, **103** (2012), no. 2, 247–261.
- [4] T. Hashinaga, A. Kubo & H. Tamaru, Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces, *preprint*, arXiv:1305.6128.
- [5] J. Lauret, Ricci soliton solvmanifolds, *J. reine angew. Math.*, **650** (2011), 1–21.

複素グラスマン空間上の大対蹠集合のデザインによる特徴付け*

栗原 大武†

北九州工業高等専門学校 総合科学科

概要

球面上の北極と南極のような「極対的な点のペア」の概念は、Chen–Nagano によって対称空間上で対蹠集合として一般化された。対蹠集合の中でも最もサイズ大きいものを大対蹠集合と呼ぶ。大対蹠集合は、空間上に“きれいに”散らばっている点配置と考えられる。本講演ではデザインの言葉を用いて複素グラスマン空間上の大対蹠集合をとあるデザインの中でも最小サイズをもつものとして特徴づける。

また、最後にこの結果に関連した最新の話題についても触れることにする。

1 対蹠集合

M を連結なコンパクト対称空間とし、各点 $x \in M$ に対して、 x 上の点対称を s_x とする。対蹠集合の概念は 1988 年に Chen–Nagano [1] によって導入された。

定義 1.1. M の部分集合 S が

$$\forall x, y \in S, s_x(y) = y$$

を満たすときに、 S を**対蹠集合**と呼ぶ。

対蹠集合は球面で言う、北極と南極のような極対的な点のペアの一般化になっている。更に対蹠集合のサイズは必ず有限になることも示されている。対蹠集合の中でもこの最大のサイズを持つ対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。対称 R 空間上の大対蹠集合は合同変換を除いて一意に定まることが最近 Tanaka–Tasaki [4] によって示された。

2 複素グラスマン空間上のデザイン

n, m を $n \geq 2m$ を満たす正整数とする。 $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ を \mathbb{C}^n の m 次元部分空間 a からなる集合とし、複素グラスマン空間と呼ぶ。 $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ はユニタリ群 $U(n)$ が作用する等質空間であり、 $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}} \cong U(n)/(U(m) \times U(n-m))$ が成り立つ。

σ を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の $U(n)$ 不変な Haar 測度として、 $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の連続関数 $f, g \in C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ に対して、内積を

$$(f, g) := \frac{1}{\sigma(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})} \int_{\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}} f \bar{g} d\sigma$$

で定める。このとき $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の関数空間には $U(n)$ が自然に作用しており、 $C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ も $U(n)$ の表現になる。ここで $\mu \in P_m := \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \mid \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m \geq 0\}$ に対して、 H_μ を $C(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ の $U(n)$ 部分空間の中でウエイト

$$(\mu_1, \dots, \mu_m, 0, \dots, 0, -\mu_m, \dots, -\mu_1)$$

* 第 60 回幾何学シンポジウム (2013 年 8 月 24 日 ~ 27 日, 東京工業大学) 講演予稿。

† E-mail : kurihara@kct.ac.jp

をもつ $U(n)$ の既約表現に同型なものとする. このとき, $\bigoplus_{\mu \in P_m} H_\mu$ は $L^2(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})$ の中に稠密に入っていることが確かめられる.

1977年に Delsarte–Goetals–Seidel [2] は球面上のデザイン理論を与えた. この結果により, その後他の連続空間の場合にもデザイン理論が考えられてきた. 例えば階数 1 のコンパクト対称空間上であれば, 球面上とほぼ平行にデザイン理論が成り立つことが示された (Hoggar [5] など). 複素グラスマン空間上のデザインは階数 1 のコンパクト対称空間上と異なる性質を持つことが多く, まだ多くのことがわかっていない. 以下で球面などのデザインの定義を少し拡張した複素グラスマン空間上のデザインの定義を与える.

定義 2.1. T を P_m の有限部分集合とする. このとき $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の有限部分集合 X が以下の条件をみたすときに X を T デザインと呼ぶ:

$$\frac{1}{|X|} \sum_{a \in X} f(a) = \frac{1}{\sigma(\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}})} \int_{\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}} f d\sigma \quad \forall f \in \bigoplus_{\mu \in T} H_\mu.$$

3 複素グラスマン空間上の大対蹠集合とデザイン

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を \mathbb{C}^n の正規直交基底とする. $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対して, $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の元を $\mathbf{a}_I := \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_i \mid i \in I\}$ とする. このとき $S := \{\mathbf{a}_I \mid I \subset \{1, 2, \dots, n\}, |I| = m\}$ は $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ 上の大対蹠集合である. また $|S| = \binom{n}{m}$ であることが容易に分かる.

複素グラスマン空間上の大対蹠集合とデザインの関係について得られた結果を紹介する.

$$\mathcal{E} := \{(1^i, 0^{m-i}) \mid i = 0, 1, \dots, m\} \subset P_m$$

とする. 尚, $\bigoplus_{\mu \in \mathcal{E}} H_\mu$ は $U(n)$ の表現としてみると $\text{End}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^m \mathbb{C}^n)$ と同型な空間である.

命題 3.1 (K.–Okuda). X を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の有限部分集合とする. このとき次が成り立つ.

- (1) 大対蹠集合 S は \mathcal{E} デザイン.
- (2) X が \mathcal{E} デザインならば, $|X| \geq \binom{n}{m}$ が成り立つ.

この命題より大対蹠集合 S は \mathcal{E} デザインの中で最もサイズの小さいものであることが分かる. しかし, サイズが $|X| = \binom{n}{m}$ である \mathcal{E} デザインの構造は一意に決まらない. 実際以下の様な $\mathcal{G}_{2,4}^{\mathbb{C}}$ の $\binom{4}{2} = 6$ 点からなる部分集合 X で大対蹠集合ではないが, \mathcal{E} デザインとなる例が存在する: $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_6\} \subset \mathcal{G}_{2,4}^{\mathbb{C}}$, where

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &:= \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2\}, & \mathbf{x}_2 &:= \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_3, e_4\}, & \mathbf{x}_3 &:= \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_4\}, \\ \mathbf{x}_4 &:= \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_2, e_4\}, & \mathbf{x}_5 &:= \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1 + \sqrt{-1}e_2, e_3\}, & \mathbf{x}_6 &:= \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1 - \sqrt{-1}e_2, e_3\}. \end{aligned}$$

命題 3.1 から, 大対蹠集合は最小サイズをもつ \mathcal{E} デザインであるが, 逆は言えないことがわかった. しかし, デザインにもう少し条件を加えれば, 大対蹠集合を最小サイズのデザインとして特徴づけることが出来る. 今 P_m の部分集合として

$$\mathcal{F} := \{(2, 1^{i-1}, 0^{m-i}) \mid i = 2, 3, \dots, m\} \subset P_m$$

とする.

定理 3.2 (K.–Okuda). X を $\mathcal{G}_{m,n}^{\mathbb{C}}$ の有限部分集合とする. このとき次が成り立つ.

- (1) 大対蹠集合 S は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザイン.
- (2) X が $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインならば, $|X| \geq \binom{n}{m}$ が成り立つ.
- (3) 以下は同値:
 - (1) X は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインかつ, $|X| = \binom{n}{m}$.

(2) X は大対蹠集合.

つまり大対蹠集合は $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインのなかでも最もサイズが小さいものであり, 最後の主張は最小サイズの $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ デザインが必ず大対蹠集合になるというデザインからの大対蹠集合の特徴付けを与える. 元々, 対蹠集合は幾何的に定義されたものであり, 大対蹠集合は対蹠集合の中でも最もサイズが大ききものとして定義されていたものであった. つまり, 大対蹠集合は幾何的な立場からは最大性を持ち, 他方でデザイン的な立場からは最小性を持ち, お互いの立場の丁度境界同士の交わりとして一意に定まるものであると言える.

4 ユニタリ群上の大対蹠集合とデザイン

前節までで複素グラスマン空間上の大対蹠集合を「最小サイズを持つあるデザイン」として特徴づける話をした. すると次にやるべきことは, 他の体上でのグラスマン空間上の大対蹠集合とデザインの関係性を調べる, また他の対蹠空間上の大対蹠集合とデザインの関係性を調べる, などが挙げられるだろう. 今後個別に同様の問題を考えるのはいい戦略とは言い難いので, 出来れば一般論ができれば一番良い.

しかし, いきなり一般論を作り上げるのも容易ではないのでいくつかの具体例を計算しておきたい. 再度, 複素グラスマン空間の場合に立ち返ってみると, 定理 3.2 の証明の多くの部分は, ユニタリ群のユニタリ表現を用いた. そこで複素グラスマン空間の次に考えやすいのは, 複素グラスマン空間の“親玉”であるユニタリ群上の大対蹠集合であろう. この節では, ユニタリ群上の大対蹠集合とデザインについて得られたことを紹介する.

まずユニタリ群 $U(n)$ 上のデザインを複素グラスマン空間のとき同様に定義する. $U(n)$ 上の連続関数空間 $C(U(n))$ は $U(n)$ 表現と見れるので

$$\bigoplus_{\lambda \in (\mathbb{Z})_+^n} V_\lambda$$

と既約表現分解できる. 但し $(\mathbb{Z})_+^n$ は n 個の整数の組 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ で $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ を満たすもの全体からなる集合であり, V_λ は最高ウェイト λ を持つ $U(n)$ の既約表現と同型な空間である.

定義 4.1. T を $(\mathbb{Z})_+^n$ の部分集合とする. このとき $U(n)$ の有限部分集合 X が以下の条件をみたすときに X を T デザインと呼ぶ:

$$\frac{1}{|X|} \sum_{a \in X} f(a) = \frac{1}{\xi(U(n))} \int_{U(n)} f d\xi \quad \forall f \in \bigoplus_{\lambda \in T} V_\lambda.$$

ただし ξ は $U(n)$ 上の $U(n)$ 不変な Haar 測度である.

この定義から定まる「あるデザイン」で $U(n)$ 上の大対蹠集合を特徴づけるというのがこの節の目標である. 尚, $U(n)$ 上の大対蹠集合は $U(n)$ 変換を除いて

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad |S| = 2^n$$

と同型になることが知られている.

ユニタリ群上の大対蹠集合とデザインの関係性はまだ完全に解明はしていないが, 部分的に $n = 2$ のとき解明したことをここで述べる.

$$T := \{(k, l) \in (\mathbb{Z})_+^2 \mid k, l \text{ の片方が奇数で他方が偶数, 若しくは } k, l \text{ の両方が奇数で } k = l\}$$

とする.

定理 4.2. X を $U(2)$ の有限部分集合とする. このとき次が成り立つ.

- (1) 大対蹠集合 S は T デザイン.
 (2) X が T デザインならば, $|X| \geq 4$ ($= |S|$) が成り立つ.

この結果から大対蹠集合 S は最小サイズの T デザインであることが分かる. しかし, 逆に最小サイズの T デザインとして大対蹠集合を特徴づけることは出来ない. 実際に $U(2)$ の部分集合として

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z_1 & 0 \\ 0 & -\bar{z}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & -\bar{z}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \right\}, \quad (z_1, z_2 \text{ は絶対値 } 1 \text{ の複素数})$$

とすると X は最小サイズの T デザインであるが, $z_1 = z_2 = 1$ 出ない限り X は対蹠集合にならない. ここで注意したいことは T は大対蹠集合がデザインになりうる添字を全て集めてきた可算濃度の部分集合である. つまり, $n = 2$ のとき, $U(2)$ 上の大対蹠集合は「最小サイズのあるデザイン」として特徴づけることが出来ないことがわかった.

今後は「最小サイズのあるデザイン」として特徴づけられないという現象は, $n = 2$ の場合に特別起こりうるものなのか, 一般の n に対して成り立つものなのかを調べて行きたい. また, 一般の対称空間に対しても, 大対蹠集合が「最小サイズのあるデザイン」として特徴づけられるものとそうでないものの分類を行いたい.

参考文献

- [1] B.-Y. Chen and T. Nagano. A Riemannian Geometric Invariant and its Applications to a Problem of Borel and Serre. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **308**(1):273–297, 1988.
 [2] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel. Spherical codes and designs. *Geom. Dedicata*, **6**(3):363–388, 1977.
 [3] H. Kurihara and T. Okuda. Great antipodal sets of complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities. preprint, arXiv:1303.5936.
 [4] M.S. Tanaka and H. Tasaki. The intersections of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type. *J. Math. Soc. Japan*, **64**(4): 1297–1332, 2012.
 [5] S.G. Hoggar. t -designs in projective spaces. *European J. Combin.*, **3**(3):233–254, 1982.

体の中心の存在範囲と一意性

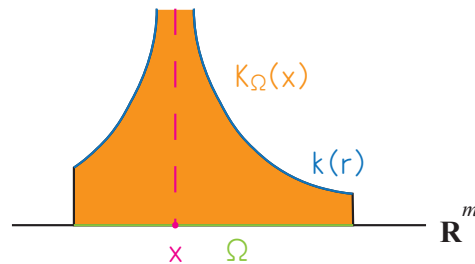
坂田 繁洋 (首都大学東京理工学研究科)
E-mail: sakata-shigehiro@ed.tmu.ac.jp

1 序：距離核ポテンシャルから決まる体の中心

Ω を \mathbb{R}^m の体 (body, 有界な開集合の閉包) とする。狭義単調減少な C^1 級関数 $k : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を積分核とする Ω 上の距離核ポテンシャル

$$K_\Omega(x) := \int_\Omega k(r) dy, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad r = |x - y| \quad (1.1)$$

を考える。 K_Ω を最大にするという意味で Ω の中心を定義する。



定義 1.1 ポテンシャル K_Ω を最大にする点 c を Ω の k -中心とよぶ。

Ω の k -中心について、次の基本的事柄を考える。

- k -中心の存在
- k -中心の位置 (Ω に対して、どのような場所にあるか)
- k -中心の個数 (特に、一意に決まる場合)

これらの問題のうち、存在と位置については、積分核 k が狭義単調減少であることから考察できる。

命題 1.2 k -中心は存在して、 Ω の凸包 (Ω を含む最小の凸集合) に含まれる。

よって、一意性を示すためには、ポテンシャル K_Ω が Ω の凸包で上に凸であればよい。すなわち、

$$\frac{\partial^2 K_\Omega}{\partial v^2}(x) < 0, \quad v \in S^{m-1}, \quad x \in \text{conv } \Omega \quad (1.2)$$

を示せばよい。

2 例： $r^{\alpha-m}$ -中心

積分核 k を具体的に与えた場合に、[O1] や [O2] で Ω の中心の一意性について考察されている。それらを簡単に紹介する。

距離核ポテンシャル

$$V_{\Omega}^{(\alpha)}(x) := \begin{cases} \int_{\Omega} r^{\alpha-m} dy & (0 < \alpha \neq m), \\ - \int_{\Omega} \log r dy & (\alpha = m), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad r = |x - y| \quad (2.1)$$

を Ω の $r^{\alpha-m}$ -ポテンシャルとよぶ。

定義 2.1 点 c_{α} が Ω の $r^{\alpha-m}$ -中心であるとは,

(1) $0 < \alpha \leq m$ のとき, c_{α} は $V_{\Omega}^{(\alpha)}$ を最大にする

(2) $m < \alpha$ のとき, c_{α} は $V_{\Omega}^{(\alpha)}$ を最小にする

と定義する。

定理 2.2 ([O1]) $\alpha \geq m + 1$ ならば, Ω の $r^{\alpha-m}$ -中心は唯一つに決まる。

証明 方向 $v \in S^{m-1}$ と点 $x \in \text{conv } \Omega$ を任意にとる。

$\alpha \geq m + 2$ のとき,

$$\frac{\partial^2 V_{\Omega}^{(\alpha)}}{\partial v^2}(x) = (\alpha - m) \int_{\Omega} ((\alpha - m - 2)(v \cdot (x - y))^2 + r^2) dy > 0$$

であるから $V_{\Omega}^{(\alpha)}$ は $\text{conv } \Omega$ で下に凸である。

$m + 1 \leq \alpha < m + 2$ のとき, 上の式の $v \cdot (x - y)$ に Schwarz の不等式を用いて,

$$\frac{\partial^2 V_{\Omega}^{(\alpha)}}{\partial v^2}(x) \geq (\alpha - m)(\alpha - m - 1) \int_{\Omega} r^2 dy > 0$$

となるから $V_{\Omega}^{(\alpha)}$ は $\text{conv } \Omega$ で下に凸である。 □

定理 2.3 ([O1]) $0 < \alpha \leq 1$ かつ Ω が凸ならば, Ω の $r^{\alpha-m}$ -中心は唯一つに決まる。

証明 積分の極座標変換をすると, $V_{\Omega}^{(\alpha)}(x)$ は

$$V_{\Omega}^{(\alpha)}(x) = \int_{S^{m-1}} \left(\int_0^{\rho(x,v)} r^{\alpha-1} dr \right) d\sigma(v),$$

と表される。ここで, $\rho(x, v) = \max\{a \geq 0 \mid x + av \in \Omega\} \in \mathbb{R}$ は Ω の x についての半径関数である。

Ω の凸性と $r^{\alpha-1}$ が減少関数であることを用いると, 任意の $\text{conv } \Omega$ の 2 点 x と x' に対して,

$$\begin{aligned} & 2V_{\Omega}^{(\alpha)}\left(\frac{x+x'}{2}\right) - \left(V_{\Omega}^{(\alpha)}(x) + V_{\Omega}^{(\alpha)}(x')\right) \\ & > \int_{S^{m-1}} \left(\left(2 \int_0^{\frac{\rho(x,v)+\rho(x',v)}{2}} r^{\alpha-1} dr - \int_0^{\rho(x,v)} r^{\alpha-1} dr - \int_0^{\rho(x',v)} r^{\alpha-1} dr \right) \right) d\sigma(v) \\ & = \int_{S^{m-1}} \left(\left(\int_{\min\{\rho(x,v), \rho(x',v)\}}^{\frac{\rho(x,v)+\rho(x',v)}{2}} r^{\alpha-1} dr - \int_{\frac{\rho(x,v)+\rho(x',v)}{2}}^{\max\{\rho(x,v), \rho(x',v)\}} r^{\alpha-1} dr \right) \right) d\sigma(v) \geq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって, $V_{\Omega}^{(\alpha)}$ は $\text{conv } \Omega$ で上に凸である。 □

定理 2.2 と定理 2.3 より次のことが問題となる。

問題 2.4 ([O1]) Ω が凸ならば, 任意の α に対して, $r^{\alpha-m}$ -中心は唯一つに決まるか? すなわち, $1 < \alpha < m + 1$ の場合も $r^{\alpha-m}$ -中心の一意性は成り立つか?

これに対して, 今井淳氏 (首都大学東京) は, [O2] で, Ω がある凸集合 $\tilde{\Omega}$ の十分大きい半径の平行体 (parallel body) で与えられる場合に部分的解決を行った。

3 中心の存在範囲 : 体の心臓

命題 1.2 で「 k -中心は Ω の凸包に含まれる」と述べたが, この評価を改良する。すなわち, 「 Ω の境界付近にも k -中心は存在し得るのか?」や「中心と言うくらいだからもう少し Ω の真ん中付近に寄ってほしい」という直感を精密に評価する。

組 $(v, b) \in S^{m-1} \times \mathbb{R}$ に対して, v 方向の高さが b 以上である Ω の点の集合を $\Omega_{v,b}^+$ とおく。超平面 $\{p \in \mathbb{R}^m | p \cdot v = b\}$ に関する折り返し $\text{Refl}_{v,b}$ で, $\text{Refl}_{v,b}(\Omega_{v,b}^+) \subset \Omega$ となっているとする。任意の $x \in \Omega_{v,b}^+$ に対して, $x' = \text{Refl}_{v,b}(x)$ とおくと,

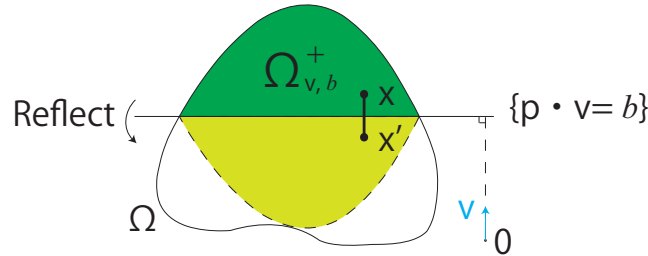
$$\int_{\text{Refl}_{v,b}(\Omega_{v,b}^+)} k(|x' - y|) dy = \int_{\Omega_{v,b}^+} k(|x - y|) dy, \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega_{v,b}^+} k(|x' - y|) dy = \int_{\text{Refl}_{v,b}(\Omega_{v,b}^+)} k(|x - y|) dy \quad (3.2)$$

が成り立ち,

$$K_{\Omega}(x') - K_{\Omega}(x) = \int_{\Omega \setminus (\text{Refl}_{v,b}(\Omega_{v,b}^+) \cup \Omega_{v,b}^+)} (k(|x' - y|) - k(|x - y|)) dy > 0 \quad (3.3)$$

を得る。よって, $\Omega_{v,b}^+$ の点は k -中心になり得ない。



定義 3.1 ([O1], [BM]) 方向 v に関する最大限の折り返しの高さを

$$l(v) := \min \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \forall b \geq a, \text{Refl}_{v,b}(\Omega_{v,b}^+) \subset \Omega \right\}$$

とおく。

$$\heartsuit(\Omega) := \bigcap_{v \in S^{m-1}} \{p \in \mathbb{R}^m \mid p \cdot v \leq l(v)\}$$

とおき, Ω の心臓とよぶ。

定理 3.2 ([BM], [Sak1]) 任意の k -中心は Ω の心臓に含まれる。

よって, k -中心の一意性を示すためには, ポテンシャル K_{Ω} が Ω の心臓で上に凸であればよい。すなわち,

$$\frac{\partial^2 K_{\Omega}}{\partial v^2}(x) < 0, \quad v \in S^{m-1}, \quad x \in \heartsuit(\Omega) \quad (3.4)$$

を示せばよい。

4 中心の一意性に関する実験的考察

k -中心が一意に定まるための十分条件を与えるために、 k -中心が一意に定まらない例を考える。

例 4.1 $k(r) = 1/\sqrt{r}$, $\Omega = \{(y_1, y_2) \mid (y_1 - 1)^2 + y_2^2 \leq 1\} \cup \{(y_1, y_2) \mid (y_1 + 1)^2 + y_2^2 \leq 1\}$ とおく。このとき、 $\heartsuit(\Omega)$ は $\{(y_1, 0) \mid -1 \leq y_1 \leq 1\}$ となる。 $(\partial K_\Omega / \partial x_1)(\lambda, 0)$ のグラフを Maple で描くと図 1 のようになる。

次に、 K_Ω の 2 階微分が $\text{conv } \Omega$ 全体では負でないが、 $\heartsuit(\Omega)$ では負になる例を考える。

例 4.2 $k(r) = 1/\sqrt{r}$, $\Omega = \{(y_1, y_2) \mid 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq |y_2| \leq y_1 \tan(\pi/10)\}$ とおく。このとき、 $\heartsuit(\Omega)$ は $\{(y_1, 0) \mid 1/2 \leq y_1 \leq 1\}$ となる。 $(\partial^2 K_\Omega / \partial x_1^2)(\lambda, 0)$ のグラフを Maple で描くと図 2 のようになる。

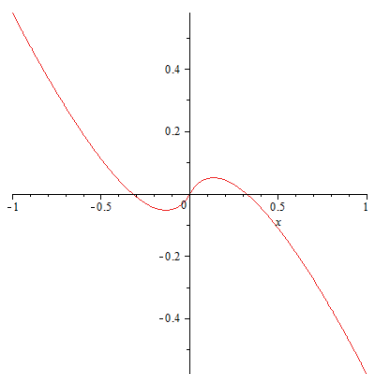


図 1: $(\partial K_\Omega / \partial x_1)(\lambda, 0)$ のグラフ

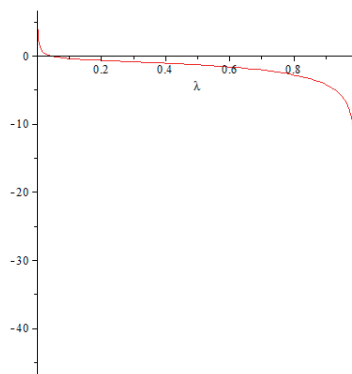


図 2: $(\partial^2 K_\Omega / \partial x_1^2)(\lambda, 0)$ のグラフ

例 4.2 より 2 次元の凸線対称の場合でも K_Ω の 2 階微分が $\text{conv } \Omega$ 全体で負にならない例が見つかってしまう。そのため、一般次元で $\heartsuit(\Omega)$ の幾何を本質的に用いて k -中心の一意性を示すことは難しいと思われる。そこで、2 次元の場合だが、 K_Ω の 2 階微分が $\text{conv } \Omega$ 全体で負ではないが、 $\heartsuit(\Omega)$ では負になることを含めて、 k -中心の一意性を考察する。ここで、積分核 k には、問題 2.4 を肯定的に解決するために十分な条件として、 $k'(r)/r$ の単調増加性を仮定する：

$$\left(\frac{(r^{\alpha-m})'}{r} \right)' = (\alpha - m)(\alpha - m - 2)r^{\alpha-m-4} > 0 \iff 0 < \alpha < m, m + 2 < \alpha, \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{(r^{\alpha-m})'}{r} \right)' = (\alpha - m)(\alpha - m - 2)r^{\alpha-m-4} < 0 \iff m < \alpha < m + 2, \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{(-\log r)'}{r} \right)' = \frac{2}{r^3} > 0 \quad (4.3)$$

Ω の形状に関して、次の 3 通りを考察すればよい。

- (0) $\dim \heartsuit(\Omega) = 0$: $\heartsuit(\Omega)$ が一点集合となり k -中心の一意性が従う。
- (1) $\dim \heartsuit(\Omega) = 1$: ある直線 L が存在して、 Ω は L に関して線対称、 L^\perp に関して凸である。
- (2) $\dim \heartsuit(\Omega) = 2$: 一般に Ω の形に関して何も言えない。

場合 (1) に対して, 例 4.1 より線対称性と一方向に対する凸性では (簡単な) 反例が挙げられてしま
う。そこで, Ω が \mathbb{R}^2 の中で凸な場合を考察する。

場合 (2) に対して, 特に Ω が三角形であれば, [BM] で, $\heartsuit(\Omega)$ の形が示されているので, 考察が可
能である (図 3, 図 4)。

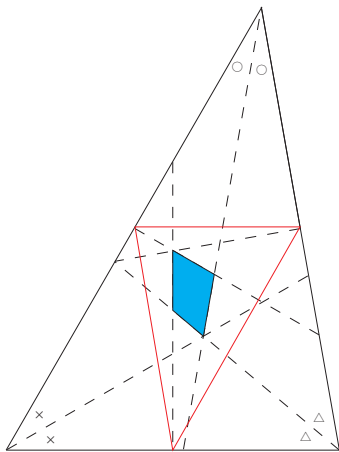


図 3: 鋭角三角形の心臓

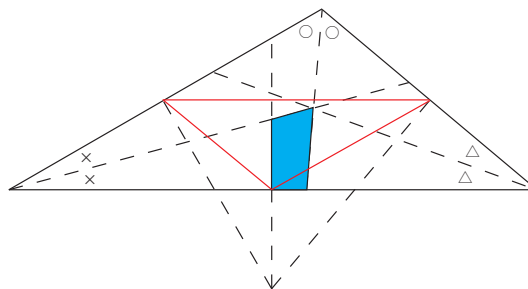


図 4: 鈍角三角形の心臓

定理 4.3 $k'(r)/r$ は単調増加であるとする。 Ω が凸線対称体または鈍角でない三角形ならば, k -中
心は一意に定まる。

系 4.4 $1 < \alpha < 3$ かつ Ω が凸線対称体または鈍角でない三角形ならば, $r^{\alpha-2}$ -中心は一意に定まる。

参考文献

- [BM] L. Brasco and R. Magnanini, *The heart of a convex body*, Geometric properties for parabolic and elliptic PDE's (R. Magnanini, S. Sakaguchi and A. Alvino eds), Springer INdAM Series 2, **2** (2013), 49–66.
- [O1] J. O'Hara, *Renormalization of potentials and generalized centers*, Adv. in Appl. Math. **48** (2012), 365–392.
- [O2] J. O'Hara, *Uniqueness of radial centers of parallel bodies*, arXiv:1109.5069.
- [Sak1] S. Sakata, *Movement of centers with respect to various potentials*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [Sak2] S. Sakata, *Experimental investigation on uniqueness of a center of a body*, submitted.

正 N 角柱の対称性をもつ種数 1 の N -エンド・カテノイド

室谷 文祥 (大阪市立大学数学研究所)

1 序

\bar{M} をコンパクト Riemann 面、 $M := \bar{M} \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ とし、全曲率が有限な完備共形極小はめ込み $X: M \rightarrow \mathbf{R}^3$, X の Gauss 写像 $G: M \rightarrow \mathbf{S}^2$, G の Riemann 球面への立体射影 $g: M \rightarrow \hat{\mathbf{C}}$ を考える。Weierstrass 表現公式により、 X は、 g と M 上の正則 1-form η を用いて、次のように表示される。

$$(1.1) \quad X(z) := \operatorname{Re} \int^z \Phi, \quad \Phi(z) = {}^t(1 - g^2, \sqrt{-1}(1 + g^2), 2g)\eta.$$

このとき、 X の計量は $ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\eta|^2$ で与えられる。また、 X の Weierstrass データ (g, η) は \bar{M} 上有理型に拡張される。 q_j の除外近傍の X による像をエンド q_j と呼ぶ。エンド q_j のフラックス・ベクトル φ_j は、 q_j を左に囲む単純閉曲線 γ_{q_j} に沿う余法ベクトル \vec{n} の線積分 $\varphi_j := \int_{\gamma_{q_j}} \vec{n} ds$ で与えられる。Gauss の発散公式により、フラックス公式、すなわち、各エンドのフラックス・ベクトルの総和が 0 となることが従う。

以下、 X は n -ノイド、すなわち、 n 個のエンドがすべて埋め込まれているとする。このとき、各エンド q_j において φ_j は $G(q_j)$ と平行であり、その比 $w_j := \varphi_j / (4\pi G(q_j)) \in \mathbf{R}$ が定まる。 w_j をエンド q_j のウェイトと呼ぶ。埋め込まれたエンドのうち、ウェイトが 0 となるものを平面型エンド、0 とならないものをカテノイド型エンドという。特に、 n -ノイドのうち、全てのエンドがカテノイド型であるものを n -エンド・カテノイドと呼ぶ。

n -ノイド X に対し、ウェイトと Gauss 写像の組 $(w_1, \dots, w_n), (G(q_1), \dots, G(q_n))$ を X のフラックス・データという。フラックス公式は、フラックス・データにより $\sum_{j=1}^n w_j G(q_j) = 0$ と書かれる。逆に、次のフラックス逆問題が考えられる。(cf. [6])

問題 1.1. $\sum_{j=1}^n a_j v_j = 0$ を満たす $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbf{S}^2)^n$ を与えたとき、それらをフラックス・データとする n -ノイドが存在するか。

一般に、この問題を解くためには、非分岐条件 (計量が非退化となる条件) と周期条件

$$(1.2) \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi = 0 \quad (\forall \gamma : \text{閉曲線})$$

を解く必要がある。本稿では正 N 角柱の対称性をもつ種数 1 の N -エンド・カテノイドについて、この問題を考える。

2 種数 1 の n -ノイドの定式化

本稿において、周期平行四辺形 $T^2 = \mathbf{C}/(\mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2)$ を考える際、基本周期 (ω_1, ω_2) は $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ を満たすとする。

2.1 定式化とクラス分け

種数 1 の n -ノイド $X : T^2 \setminus \{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ において、 (g, η) を X の Weierstrass データとし、 g の極が重複を込みにして s_1, \dots, s_n で与えられているとする。

すると、Weierstrass のシグマ関数により、 η は

$$(2.1) \quad \eta = -Q(u)^2 du, \quad Q(u) := C \frac{\prod_{j=1}^n \sigma(u - s_j)}{\prod_{j=1}^n \sigma(u - u_j)} \sqrt{\frac{\sigma(u - u_n)}{\sigma(u - u_n - \omega)}} \quad (C \neq 0 : \text{定数})$$

と表示される。ここで、 Q は分岐を 1 つ固定し、 $(2\omega_1, 2\omega_2)$ を基本周期とする楕円関数と考えている。また、 ω は $2(u_1 + \dots + u_n) + \omega = 2(s_1 + \dots + s_n)$ をみたす定数である。必要ならば s_n の代表元を取り換え、 $\omega \in \{0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2\}$ とすることができる。

$P(u) := g(u)Q(u)$ とすると、 P, Q は次をみたす。

命題 2.1 ([5]). $X : T^2 \setminus \{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ を $\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ ($m_1, m_2 \in \{0, 1\}$) のタイプの n -ノイドとする。このとき、

$$\begin{cases} Q(u + \omega_1) = (-1)^{m_2} Q(u), & P(u + \omega_1) = (-1)^{m_2} P(u), \\ Q(u + \omega_2) = (-1)^{m_1} Q(u), & P(u + \omega_2) = (-1)^{m_1} P(u) \end{cases}$$

が成り立つ。

なお、 $\omega = \omega_1, \omega = \omega_1 + \omega_2$ のタイプの n -ノイドは、基本周期 (ω_1, ω_2) を取りかえることにより、 $\omega = \omega_2$ のタイプの n -ノイドに帰着される。これをふまえると、種数 1 の n -ノイドは、大きく $\omega = 0$ と $\omega = \omega_2$ の 2 つのクラスに分類される。ただし、面对称性や特定のエンド配置を仮定する場合は、基本周期を固定し、4 つのクラスを区別して考える。

ここで、 $\omega = 0$ のクラスを考える。このクラスに含まれる既知の例として、Costa の 4-ノイド、およびその Kusner-Schmitt による一般化が挙げられる。(cf. [2, 7])

Weierstrass のゼータ関数により、次の表示を得る。

命題 2.2 ([4]). $X : T^2 \setminus \{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ を $\omega = 0$ のタイプの n -ノイドとする。このとき、 X の Weierstrass データは以下で表示される。

$$(2.2) \quad g(u) = \frac{P(u)}{Q(u)}, \quad \eta = -Q(u)^2 du.$$

ここで、 P, Q は次で与えられる。

$$(2.3) \quad \begin{cases} P(u) = \sum_{j=1}^n c_j \zeta(u - u_j) + c_0, & \sum_{j=1}^n c_j = 0 \\ Q(u) = \sum_{j=1}^n b_j \zeta(u - u_j) + b_0, & \sum_{j=1}^n b_j = 0. \end{cases}$$

さらにエンドにおける周期条件を、ウェイトの条件式に書き換え、1 次のホモロジー生成元に関する周期条件を書き下すことで、与えられたフラックス・データをもつ n -ノイドが存在するための必要十分条件を記述することができる。(cf. [5])

2.2 面対称性と非存在

一般に、極小はめこみ $X : \overline{M} \rightarrow \mathbf{R}^3$ において、Schwarz の鏡像による面対称性は、反正則対合 $I : \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ に対して与えられる。本稿では、反正則対合 $I_1(u) = \bar{u}$ に関する面対称性をもつ種数 1 の n -ノイドを考える。面対称性から、必要ならば基本周期を取り替えることにより、定義域のトーラスは長方形トーラス ($\omega_1 \in \mathbf{R}_+, \omega_2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R}_+$), ひし形トーラス ($\omega_1 \in \mathbf{R}_+, \omega_2 - \omega_1/2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R}_+$) のいずれかに限られる。

長方形トーラスを定義域とする場合、特定のエンド配置のもとで次の主張が成り立つ。

命題 2.3 ([5]). $\omega_1 \in \mathbf{R}_+, \omega_2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R}_+, u_j \in \mathbf{R}$ を仮定する。このとき、 $\omega = 0, \omega_2$ のタイプの n -ノイド $X : T^2 \setminus \{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ で、反正則対合 $I_1(u) = \bar{u}$ に関する面対称性をもつものは存在しない。

ひし形トーラスを定義域とする場合、エンド配置にかかわらず次の主張が成り立つ。

命題 2.4. $\omega_1 \in \mathbf{R}_+, \omega_2 - \omega_1/2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R}_+$ を仮定する。このとき、 $\omega = \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ のタイプの n -ノイド $X : T^2 \setminus \{u_1, \dots, u_n\} \rightarrow \mathbf{R}^3$ で、反正則対合 $I_1(u) = \bar{u}$ に関する面対称性をもつものは存在しない。

以上より、反正則対合 $I_1(u) = \bar{u}$ に関する面対称性をもち、 $u_j \in \mathbf{R}$ を満たす n -ノイドのクラスは、(1) 長方形トーラス上では $\omega = \omega_1, \omega_1 + \omega_2$, (2) ひし形トーラス上では $\omega = 0, \omega_1$ に限定される。

3 正 N 角柱の対称性をもつ N -エンド・カテノイド

前節の定式化をもとに、正 N 角柱の対称性をもつ N -エンド・カテノイドを考える。

3.1 長方形トーラス上の場合

$\tilde{\omega}_1 \in \mathbf{R}, \tilde{\omega}_2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R}_+$ とし、 $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ を基本周期とする長方形トーラス上で定義された N -ノイドを考える。図 1 のように 4 重被覆を取れば、 $(\omega_1, \omega_2) := (2\tilde{\omega}_1, 2\tilde{\omega}_2)$ を基本周期と

する長方形トーラス上で定義された $\omega = 0$ のクラスの $4N$ -ノイドが得られる。

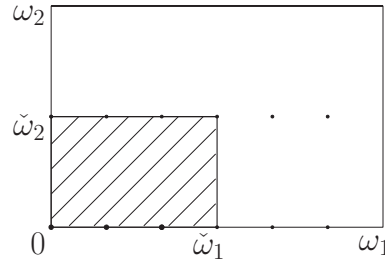


図 1: 長方形トーラスの 4 重被覆 ($N = 3$ の場合)

以下、この 4 重被覆で Weierstrass データ (g, η) を考える。 d を $1 \leq d \leq N - 1$ を満たし、 N と互いに素な自然数とする。そして、正 N 角柱の対称性、すなわち次の 3 つの対称性を仮定する。

$$(3.1) \quad \begin{cases} I_1(u) := \bar{u}, & g \circ I_1 = \frac{1}{g}, & I_1^* \eta = -\overline{g^2 \eta}, \\ I_2(u) := -\bar{u}, & g \circ I_2 = \bar{g}, & I_2^* \eta = -\bar{\eta}, \\ T_N(u) := u + \frac{\check{\omega}_1}{N}, & g \circ T_N = \zeta_N^d g, & T_N^* \eta = \zeta_N^{-d} \eta, \end{cases}$$

ここで、 $\zeta_N := \exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$ である。

必要ならば、 \mathbf{R}^3 における対称変換により $P(u)$, $Q(u)$, d を取り替え、

$$(3.2) \quad \begin{cases} Q \circ I_1(u) = \sqrt{-1} \overline{P(u)}, \\ Q \circ I_2(u) = \sqrt{-1} \overline{Q(u)}, & P \circ I_2(u) = \sqrt{-1} \overline{P(u)}, \\ Q \circ T_N(u) = \zeta_{2N}^{-d} Q(u), & P \circ T_N(u) = \zeta_{2N}^d P(u), \end{cases}$$

が成り立つとしてよい。対称性により、非分岐条件とエンドにおける周期条件は自動的に成り立つ。そして、ホモロジー生成元に関する周期条件を解くことにより、次の主張を得る。

定理 3.1. 長方形トーラス上で定義され、(3.2) で与えられる対称性をもつ N -エンド・カテナノイドが存在するための必要十分条件は $d < N/2$ となることである。また、この条件をみたす各 N, d に対し、(3.2) の対称性をもつ N -エンド・カテナノイドは一意的である。

なお、命題 2.1 により、この N -エンド・カテナノイドのクラスは d が奇数のとき $\check{\omega} = \check{\omega}_1 + \check{\omega}_2$, d が偶数のとき $\check{\omega} = \check{\omega}_1$ となる。

3.2 ひし形トーラス上の場合

N を奇数、 $\check{\omega}_1 \in \mathbf{R}$, $\check{\omega}_2 - \check{\omega}_1/2 \in \sqrt{-1}\mathbf{R}_+$ とし、 $(\check{\omega}_1, \check{\omega}_2)$ を基本周期とするひし形トーラス上で定義された N -ノイドを考える。面对称性をもつものを考えると、命題 2.4 により、この N -ノイドのクラスは $\check{\omega} = 0, \check{\omega}_1$ となる。いずれのクラスについても、図 2 のように 2 重被覆をとり、基本周期を取り替えれば、 $(\omega_1, \omega_2) := (\check{\omega}_1, 2\check{\omega}_2 - \check{\omega}_1)$ を基本周期とする長方形トーラス上で定義された $\omega = 0$ のクラスの $2N$ -ノイドが得られる。

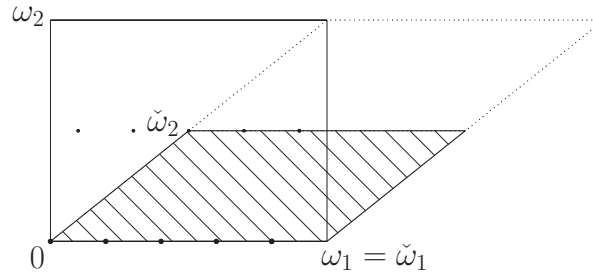


図 2: ひし形トーラスの 2 重被覆 ($N = 5$ の場合)

以下、この 2 重被覆で Weierstrass データ (g, η) を考える。 d を $1 \leq d \leq N - 1$ を満たし、 N と互いに素な偶数とする。そして、正 N 角柱の対称性 (3.1) を仮定する。長方形トーラスの場合と同様、 \mathbf{R}^3 における対称変換により、(3.2) が成り立つとしてよい。この条件のもと、周期条件を評価することにより、次の主張を得る。

定理 3.2. ひし形トーラス上定義され、(3.2) で与えられる対称性をもつ N -エンド・カテナイドが存在するための十分条件は $d \leq 2N/5$ となることであり、これをみたす各 N, d に対し、少なくとも 2 つ存在する。また、非存在の十分条件は $d \geq CN$ となることである。ここで、 $C := \max_{x \in (1, +\infty)} (2x \log x) / (x + 1)^2 \approx 0.4477$ である。

なお、命題 2.1 により、この N -エンド・カテナイドのクラスは $d/2$ が奇数のとき $\tilde{\omega} = 0$ 、 $d/2$ が偶数のとき $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1$ となる。

参考文献

- [1] J. Berglund and W. Rossman: *Minimal surfaces with catenoid ends*, Pacific J. Math. **171** (1995), 353–371.
- [2] C. J. Costa: *Complete minimal surfaces in \mathbf{R}^3 of genus one and four planar embedded ends*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 1279–1287.
- [3] L.P. Jorge and W.H. Meeks III: *The topology of complete minimal surfaces of finite total curvature*, Topology **22** (1983), 203–221.
- [4] S. Kato and H. Muroya: *Minimal surfaces of genus one with catenoidal ends*, Osaka J. Math. **49** (2012), 931–992.
- [5] S. Kato and H. Muroya: *Minimal surfaces of genus one with catenoidal ends II*, submitted.
- [6] S. Kato, M. Umehara, K. Yamada: *An inverse problem of the flux for minimal surfaces*, Indiana Univ. Math. J. **46** (1997), 529–559.
- [7] R. Kusner and N. Schmitt: *The spinor representation of surfaces in space*, arXiv:dg-ga/9610005v1, 1996.
- [8] R.M. Schoen: *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces*, J. Differential Geom. **18** (1983), 791–809.

法束の極小性と austere 部分多様体

梶ヶ谷徹* (東北大・理)

本講演では, Riemann 多様体 M 上の接束 TM に自然に定義される almost Kähler 構造を考え, M 内の部分多様体 N の法束 νN として得られる Lagrange 部分多様体の外在的性質を調べた結果を紹介する. 特に, M が実空間形の場合に, 法束に対する平均曲率形式の公式を導出し, 法束の極小性によって M 内の austere 部分多様体が特徴付けられることを示した上で, いくつかの応用を与える. また, 複素 Euclidean 空間 \mathbb{C}^m 内のハミルトン極小 Lagrange 部分多様体の族が, ある等径部分多様体の法束として現れることを見る.

Riemann 多様体 M 内の部分多様体 N が austere 部分多様体であるとは, 任意の点 $p \in N$ に対し, 各単位法ベクトル $\nu \in \nu_p N$ に関する主曲率が -1 倍に関して不変になるときを言う. この概念は, Harvey-Lawson が論文 [3] の中で, 複素 Euclidean 空間 \mathbb{C}^m 内の特殊 Lagrange 部分多様体を構成する中で導入された. 彼らは, Euclidean 空間 \mathbb{R}^m 内の部分多様体 N の法束 νN として得られる Lagrange 部分多様体が, 接束 $T\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{C}^m$ 内の (ある phase のもとでの) 特殊 Lagrange 部分多様体であるための必要十分条件が, N が \mathbb{R}^m 内の austere 部分多様体であることを示した.

接束または余接束上の構造には, 様々なものが知られており, Harvey-Lawson の結果はそのいくつかの場合に拡張されている. 例えば, Stenzel は階数 1 のコンパクト型対称空間 M 上の余接束上に Ricci-flat な Kähler 計量 g_{st} を構成したが, Karigiannis-MinOo は, 球面 S^n の場合に austere 部分多様体を, その余法束が (T^*S^n, g_{st}) 内の特殊 Lagrange 部分多様体になることとして特徴付けた [8]. また, Y. Dong は, austere の概念を擬 Euclidean 空間 \mathbb{R}_p^m の場合に拡張し, \mathbb{R}_p^m 内の (拡張された意味での) austere 部分多様体に対して, 同様の特徴付けを与えている [2].

以下では, (M, g) は常に Riemann 多様体を考え, 余接束 T^*M は, 計量 g による標準的な同型のもと接束 TM と同一視する. M 上の Riemann 計量は, 自然なしかたで接束上に佐々木計量と呼ばれる Riemann 計量 g_S を誘導する. また, TM の接空間の水平成分と垂直成分による直交分解 $TTM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ のもと自然に定義される概複素構造 J と, T^*M の標準的なシンプレクティック構造 ω により, (TM, J, ω, g_S) は almost Kähler となる. ただし, これが Kähler になるのは, (M, g) が flat の時に限ることに注意しておく. 以下ではまず, この構造に関して, Harvey-Lawson の結果の拡張を試みる. そのために, M の部分多様体 N の法束 νN の平均曲率形式を計算する. ここで,

*日本学術振興会特別研究員 (DC2), E-mail: sa9m09@math.tohoku.ac.jp

平均曲率形式とは, νN の平均曲率ベクトル H に対して, $\alpha_H := H \lrcorner \omega|_N$ で定義される νN 上の 1 形式である. (M, g) が実空間形の場合には, 次の公式が得られる.

定理 1 ([6]). N を実空間形 $M(c)$ 内の部分多様体とする. このとき, g_S に関する, 法束 νN の平均曲率形式は次で与えられる:

$$\alpha_H = d\left(\sum_{i=1}^n \tan^{-1} \kappa_i\right) - cU\left(\sum_{i=1}^n \tan^{-1} \kappa_i\right)U^*,$$

ここで, κ_i ($i = 1, \dots, n$) は N の (νN 上で定義された) 主曲率関数であり, $U(z) := u_z^v, z = (p, u)$ は canonical vertical vector field である.

この平均曲率形式からまず次が従う.

系 1 ([1], [6]). 実空間形 $M(c)$ 内の部分多様体 N が austere であることは, その法束 νN が (TM, g_S) 内の極小 Lagrange 部分多様体であることと同値である.

$c = 0$ のときが, Harvey-Lawson の結果である. この系 1 は Cintract-Morvan らによって初めて示されたものであるが [1], 定理 1 はそこには現れていない. 系 1 は定理 1 より容易に示されるが, austere 性は νN 上で $\theta := \sum_{i=1}^n \tan^{-1} \kappa_i = 0$ と同値であることに注意しておく.

定理 1 を単位接束 $T_1 M$ 内の単位法束 $\nu_1 N$ に適用することができる. この場合, $T_1 M$ には標準的な接触計量構造が入り, $\nu_1 N$ は Legendre 部分多様体となる. また, その平均曲率ベクトルは H を $\nu_1 N$ に制限したものに等しい. 従って, 次を得る.

系 2 ([6]). N を実空間形 $M(c)$ 内の austere 部分多様体とする. このとき, $\nu_1 N$ は $T_1 M$ 内の極小 Legendre 部分多様体である.

この逆は一般に成り立たないことに注意する. また, $M = S^m(1)$ のときに限り, $T_1 S^m$ は佐々木多様体である. この場合, g_S から誘導される計量は Einstein ではないが, η -Einstein であり, Stiefel 多様体 $V_2(\mathbb{R}^{m+1}) \simeq T_1 S^m$ の標準的な $SO(m+1)$ 不変佐々木-Einstein 構造と D-相似的となる. 計量の D-相似変形で, Legendre 部分多様体の極小性は保たれるから, 球面内の austere 部分多様体の単位法束は, Stiefel 多様体内の極小 Legendre 部分多様体を与える. このことは次のように言い換えることもできる. $\pi : V_2(\mathbb{R}^{m+1}) \rightarrow \tilde{G}r_2(\mathbb{R}^{m+1})$ は向き付けられた 2 平面 Grassmann 多様体上の主 S^1 束で, $\phi : \nu_1 N \rightarrow T_1 S^m$ を Legendre はめ込みとすると, $\mathcal{G} := \pi \circ \phi$ は $\tilde{G}r_2(\mathbb{R}^{m+1})$ (これは複素二次曲面 \mathbb{Q}^m と同一視される) への Lagrange はめ込みである. 一方, この写像 \mathcal{G} は, $\nu_1 N$ を指数写像によって N の球面内の tube と同一視したときの tube の (法空間を対応させる) Gauss 写像と見なせる. すなわち,

系 3 ([6]). N を球面 $S^m(1)$ 内の austere 部分多様体とする. このとき, N の tube は $\tilde{G}r_2(\mathbb{R}^{m+1})$ 内への極小な Gauss 写像を持つ.

N が austere 超曲面なら N 自体が極小な Gauss 写像を持つ. また, この系の最も基本的な例が, 等径超曲面である. (球面内の) 等径超曲面は, ある焦部分多様体の tube であるが, その焦部分多様体はすべて austere であることが知られている (例えば, [5]). なお, 等径超曲面の Gauss 写像の極小性は B.Palmer が初めて指摘したことである. 系 3 はそのことの拡張である. また, 定理 1 は Palmer が示した Gauss 写像に対する平均曲率形式の公式の一般化にあたる [10].

なお, austere 部分多様体の例は, 極小曲面の他, いくつかの具体例が知られている. 球面の場合なら, 重複度の等しい等径超曲面族のうちの一つや, 他にも例えば, [4] や [5] に例がある.

系 1 をふまえて, 以上のことがより一般の Riemann 多様体で成立するかどうかは, 興味深い問題であるが, 答えは否定的である. 例えば, non-flat な複素空間形 M 内の極小曲面 N^2 の法束がまた (TM, g_S) 内で極小であるなら, N^2 は全測地的であるか holomorphic でなければならないことが示される. 従って, N が austere であっても, 法束が極小にならないものが存在する.

一方で, 極小な法束を持つ austere 部分多様体の例は non-flat な複素空間形内にもたくさん存在する [7]. 例えば, 複素部分多様体, 全測地的部分多様体, 一定の主曲率を持つ austere Hopf 超曲面は極小な法束を持つ. これらはすべて austere である. 一定の主曲率を持つ Hopf 超曲面の場合は, 法束が極小になるのは, austere のときに限り, それは $\mathbb{C}P^{2k+1}$ 内の全測地的部分多様体 $\mathbb{C}P^k$ の tube しかないことに注意しておく.

なお, 一般の Riemann 多様体に対して, 全測地的部分多様体の法束は極小である [7]. 実空間形の場合, N が全測地的であることと, νN が全測地的であることは同値であるが, この同値性も一般の Riemann 多様体では成立しない. 例えば, $\mathbb{C}P^n$ (resp. $\mathbb{C}H^n$) 内の部分多様体 N の法束が全測地的であるための必要十分条件は, N が全測地的部分多様体 $\mathbb{C}P^k$ (resp. $\mathbb{C}H^k$, $k = 1, \dots, n-1$) または $\mathbb{R}P^n$ (resp. $\mathbb{R}H^n$) と局所的に合同になることである [7].

一般に Kähler 多様体内の Lagrange 部分多様体がハミルトン極小 (H-極小) であるとは, その平均曲率形式が $\delta\alpha_H = 0$ を満たすときを言う. ここで, δ は余微分作用素である. この概念は Y. G.-Oh によって初めて導入され, (コンパクトサポートをもつ) ハミルトン変形のもとでの体積変分の停留値になるものとして特徴付けられる [9]. 例えば \mathbb{C}^m 内の標準的なトーラス T^m や, 平行な平均曲率形式を持つ Lagrange 部分多様体は, H-極小な例である.

以下では, 複素 Euclidean 空間 \mathbb{C}^m 内の H-極小 Lagrange 部分多様体を考える. まず, 定理 1 より次が示せる:

系 4 ([6]). N を \mathbb{R}^m 内の部分多様体とする. このとき, 法束 νN が $T\mathbb{R}^m \simeq \mathbb{C}^m$ 内で平行な平均曲率ベクトルを持つならば, それは極小である. 従って, 次の 3 つは同値である: (i) N は austere, (ii) νN は極小, (iii) νN は平行な平均曲率ベクトルを持つ.

この系より, 平行な平均曲率を持つと言う意味での, \mathbb{C}^m 内の極小でない, H-極小 Lagrange 法束は存在しない. 一方で, Sakaki は, 3次元 Euclidean 空間 \mathbb{R}^3 内の曲面 N^2 の法束が $T\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C}^3$ 内で H-極小

となるものを完全に分類した [11]. それは (i) 極小曲面, (ii) $S^2(r)$, ($r > 0$), (iii) $S^1(1/\sqrt{2}) \subset S^2(1)$ の cone のいずれかである. (i) は austere であり, (ii), (iii) がそれ以外の例である. ここでは, (ii), (iii) が \mathbb{R}^3 または S^2 内の等径超曲面であることに着目し, 一般の \mathbb{C}^m 内に H-極小な Lagrange 部分多様体を構成する. 実際, 定理 1 より法束の平均曲率は, N の主曲率で表されていたことを思い出すと, 等径超曲面 (またはより一般に等径部分多様体) は最も調べやすいクラスであると考えられる. まず, Sakaki の与えた例は次のように一般化される.

定理 2 ([6]). (1) N^n を \mathbb{R}^{n+1} 内の等径超曲面とする. このとき νN が, $T\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ 内の, 極小でない, H-極小な Lagrange 部分多様体であるための必要十分条件は, N が spherical cylinder $N(r) := \mathbb{R}^{n-2} \times S^2(r)$ ($r > 0, n \geq 2$) と局所的に合同になることである. 特に $r \neq r'$ なら, $\nu N(r)$ と $\nu N(r')$ は互いに等長的ではない. 従って, 平行超曲面族 $\{N(r)\}_{r>0}$ の法束は, \mathbb{C}^{n+1} 内の H-極小 Lagrange 部分多様体の 1 パラメータ族を与える.

(2) N^n を S^{n+1} 内の等径超曲面とする. このとき N の twisted normal cone $\mathcal{CN} := \{(tp, sv) \in T\mathbb{R}^{n+2}; p \in N, \nu \in \nu_1 N, s, t \in \mathbb{R}\}$ が, $T\mathbb{R}^{n+2} \simeq \mathbb{C}^{n+2}$ 内の, 極小でない, H-極小な Lagrange 部分多様体であるための必要十分条件は, N が次のいずれかと局所的に合同になることである: (i) $S^2(r)$ ($0 < r < 1$), (ii) $S^n(1/\sqrt{2})$ ($n \geq 1$), (iii) $S^{m_1}(1/\sqrt{2}) \times S^{m_2}(1/\sqrt{2})$ ($m_1 + m_2 = n, m_1 \neq m_2$).

次に球面 S^{n+1} 内の等径超曲面 N で, それを Euclidean 空間 \mathbb{R}^{n+2} 内の部分多様体と見なしたときの法束の H-極小性を考える. この場合, N の位置ベクトルに関する主曲率はすべて -1 であるから, N は \mathbb{R}^{n+2} 内で austere にはなり得ない. 従って, 法束は極小にはならないことに注意する.

定理 3 ([6]). N^n を $S^{n+1}(1)$ 内の等径超曲面とする. このとき, \mathbb{R}^{n+2} の部分多様体として, N の法束 νN が $T\mathbb{R}^{n+1} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ 内の H-極小 Lagrange 部分多様体である必要十分条件は, N の S^{n+1} 内における相異なる主曲率の重複度がすべて 2 となることである. すなわち, N は次の 5 つのうち, いずれかと局所的に合同である: (i) $S^2 \rightarrow S^3(1) \subset \mathbb{R}^4$, (ii) $S^2 \times S^2 \rightarrow S^5(1) \subset \mathbb{R}^6$, (iii) $SU(3)/T^2 \rightarrow S^7(1) \subset \mathbb{R}^8$, (iv) $SO(5)/T^2 \rightarrow S^9(1) \subset \mathbb{R}^{10}$, (v) $G_2/T^2 \rightarrow S^{13}(1) \subset \mathbb{R}^{14}$. 特にこれらの平行超曲面族の法束は H-極小 Lagrange 部分多様体の 1-パラメータ族をなす.

また, 球面内の等径超曲面の焦部分多様体の H-極小法束の分類に関する結果も合わせて紹介する.

参考文献

- [1] B. CINTRACT AND J-M. MORVAN, *Geometry of the normal bundle of a submanifold*, Monatsh. Math. 137, (2002), no.1, 5–20.
- [2] Y. DONG, *On indefinite special Lagrangian submanifolds in indefinite complex Euclidean spaces*, J. Geom. Phys. 59 (2009), no.6, 710–726.
- [3] R. HARVEY AND H. B. LAWSON, *Calibrated geometry*, Acta Math. 148 (1982) 47–157.

- [4] O. IKAWA, T. SAKAI AND H. TASAKI, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 61, No. 2 (2009) 437-481.
- [5] G. ISHIKAWA, M. KIMURA AND R. MIYAOKA, *Submanifolds with degenerate Gauss mappings in Spheres*, Advanced Studies in Pure Mathematics 37 (2002), 115–149.
- [6] T. KAJIGAYA, *On the minimality of normal bundles and austere submanifolds*, in preparation.
- [7] T. KAJIGAYA, *On the minimality of normal bundles in tangent bundles over the complex space forms*, to appear in Proceedings of the workshop on Differential Geometry of Submanifolds and its related topics Saga, August 4-6, 2012.
- [8] S. KARIGIANNIS AND M. MIN-OO, *Calibrated subbundles in noncompact manifolds of special holonomy*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), no. 4, 371–394.
- [9] Y. G. OH, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Zeit. 212 (1993), 175–192.
- [10] B. PALMER, *Hamiltonian minimality and Hamiltonian stability of Gauss maps*. Diff. Geom and its Appl. **7** (1997), 51-58.
- [11] M. SAKAKI, *Hamiltonian stationary normal bundles of surfaces in \mathbb{R}^3* , Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 1509–1515.

平行な第 2 基本形式を持つ複素グラスマン多様体の部分多様体の考察

古賀 勇 (九州大学数理学府 D 1)

概要

複素射影空間の複素部分多様体で第 2 基本形式が平行であるようなものは, Antonio Ros によって正則断面曲率のピンチングにより特徴づけがなされていた ([4]). 今回我々は, 正則ベクトル束の理論を用いることでこの結果を複素グラスマン多様体の複素部分多様体に拡張できることを示したので, その結果を紹介する. 今回の講演内容は, 明治大学の長友康行先生との共同研究に基づく.

1 イントロダクション

Fubini-Study 計量により定正則断面曲率 1 を持つ n 次元複素射影空間を $\mathbb{C}P^n(1)$ とする. $\mathbb{C}P^n(1)$ の部分多様体のピンチング問題に関して, Antonio Ros により次のような結果が得られた [4].

定理 1.1 (A.Ros). $\mathbb{C}P^n(1)$ のコンパクト部分多様体 M が平行な第 2 基本形式を持つための必要十分条件は, M の正則断面曲率が $1/2$ 以上になることである. \square

この定理の証明は, 複素射影空間の正則断面曲率が一定であることが本質である. 一般に複素グラスマン多様体の正則断面曲率は一定ではないから, Ros による証明をそのまま平行に進めることはできない. 本講演の主目的は, 複素グラスマン多様体の上に自然に定義される正則ベクトル束に注目することで, この結果を複素グラスマン多様体の部分多様体に拡張することである.

2 グラスマン多様体の幾何学

$Gr_p(\mathbb{C}^n)$ を, n 次元複素ベクトル空間の p 次元部分空間全体が成す複素グラスマン多様体とする. 以下簡単のため, n, p が明らかなき場合は Gr と略記する. 複素グラスマン多様体の各点は, 定義から \mathbb{C}^n の部分空間である. このことから次のようにベクトル束が得られる.

定義 2.1. $Gr_p(\mathbb{C}^n)$ を複素グラスマン多様体とし, $\underline{\mathbb{C}}^n := Gr \times \mathbb{C}^n \rightarrow Gr$ をその上の自明束とする. このとき,

$$S := \{(l, v) \in \underline{\mathbb{C}}^n \mid v \in l\} \rightarrow Gr; \quad (l, v) \mapsto l$$

は複素グラスマン多様体上の正則ベクトル束となる. これを $Gr_p(\mathbb{C}^n)$ の同語反復束 (tautological vector bundle) という. また, 同語反復束は自明束の部分束であるから, 商ベクトル束 $Q \rightarrow Gr$ が得られる. すなわち, 次のような正則ベクトル束の短完全系列を満たすものが $Q \rightarrow Gr$ である:

$$0 \rightarrow S \rightarrow \underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

これを $Gr_p(\mathbb{C}^n)$ の普遍商束 (universal quotient bundle) という. \square

\mathbb{C}^n に標準的なエルミート内積が入っているとす。この時自明束に自然にエルミート計量が入るので、部分束である同語反復束にもエルミート計量 h_S が入る。普遍商束は、正則ベクトル束としては自明束の部分束とはみなせないが、 C^∞ -複素ベクトル束として同語反復束の直交補空間束と同型になるので、その意味で自明束の部分束とみなせる。それにより普遍商束にもエルミート計量 h_Q が入る。

命題 2.2. $Gr_p(\mathbb{C}^n)$ の正則接束を $T_{1,0}Gr$ とすると、

$$T_{1,0}Gr \cong S^* \otimes Q \quad (1)$$

が成り立つ。ただし $S^* \rightarrow Gr$ は $S \rightarrow Gr$ の双対ベクトル束を表す。更にこの関係式によって複素グラスマン多様体に計量を $h_{Gr} = h_{S^*} \otimes h_Q$ と入れると、これは等質計量であり、特に複素射影空間の場合、これは Fubini-Study 型の計量と一致する。□

自明束には通常の外微分が共変外微分として取れるので、それを d とする。 $S \rightarrow Gr$, $Q \rightarrow Gr$ の切断を $\underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow Gr$ の切断だと見なし、外微分を施すことで、次の式を得る：

$$\begin{aligned} ds &= \nabla^S s + Hs, & s \in \Gamma(S), \\ dt &= Kt + \nabla^Q t, & t \in \Gamma(Q). \end{aligned}$$

ここで、 $\Gamma(S)$ は $S \rightarrow Gr$ の切断全体の空間であり、 $\Gamma(Q)$ も同様である。そして右辺は、左辺を S 成分と Q 成分（正確には S の直交補空間成分）に直和分解したものである。このようにして定まる ∇^S , ∇^Q はそれぞれ $S \rightarrow Gr$, $Q \rightarrow Gr$ のエルミート接続である。 H は $\text{Hom}(S, Q)$ 値 $(1, 0)$ -テンソル場で、 K は $\text{Hom}(Q, S)$ 値 $(0, 1)$ -テンソル場である。 H を $S \rightarrow Gr$ の $\underline{\mathbb{C}}^n \rightarrow Gr$ におけるベクトル束の意味での第 2 基本形式という。

以下、テンソル H , K と計量、曲率が満たす性質を列記する。証明は [2] や [3] にある。

命題 2.3. 任意の $s \in S$, $t \in Q$ に対して、

$$h_Q(Hs, t) = -h_S(s, Kt)$$

が成り立つ。□

命題 2.4. $S \rightarrow Gr$ と $Q \rightarrow Gr$ の曲率 R^S , R^Q は、 $U, V \in T_{1,0_x}Gr$, $s \in S_x$, $t \in Q_x$ に対して

$$R^S(U, \bar{V})s = K_{\bar{V}}H_U s, \quad R^Q(U, \bar{V})t = -H_U K_{\bar{V}} t \quad (2)$$

となる。□

命題 2.5. $U, V \in T_{1,0_x}Gr$ に対して、

$$h_{Gr}(U, V) = -\text{trace}_Q H_U K_{\bar{V}} = -\overline{\text{trace}_S K_{\bar{V}} H_U}$$

が成り立つ。□

命題 2.2. のように複素グラスマン多様体に計量を定めたとき、そのエルミート接続は $\nabla^{Gr} = \nabla^{S^*} \otimes \nabla^Q$ となる。したがって複素グラスマン多様体の曲率 R^{Gr} は、

$$R^{Gr} = R^{S^*} \otimes id_Q + id_S \otimes R^Q$$

と表される。このことから、命題 2.4. より次が成り立つ。

命題 2.6. 複素グラスマン多様体 $Gr_p(\mathbb{C}^n)$ に命題 2.2. のように計量を入れたとき, その曲率 R^{Gr} は

$$R^{Gr}(U, \bar{V})Z = -H_Z K_{\bar{V}} H_U - H_U K_{\bar{V}} H_Z \quad (3)$$

と表される. ただし, 右辺は $(1, 0)$ -ベクトルを $S^* \otimes Q$ の元だとみなしている. \square

注意 2.7. 複素射影空間 $Gr_1(\mathbb{C}^n)$ の場合を考える. 命題 2.6. より $(1, 0)$ -ベクトル U に対して,

$$R^{Gr}(U, \bar{U})U = -2H_U K_{\bar{U}} H_U$$

である. 複素射影空間の同語反復束は階数 1 なので, 命題 2.5. より

$$h_{Gr}(U, U) = -K_{\bar{U}} H_U$$

が成り立つ. したがって大きさ 1 の $(1, 0)$ -ベクトル U に対する正則断面曲率 $\text{Hol}(U)$ は

$$\begin{aligned} \text{Hol}(U) &= h_{S^* \otimes Q}(-2H_U K_{\bar{U}} H_U, H_U) \\ &= h_{Gr}(U, U) \cdot h_{S^* \otimes Q}(2H_U, H_U) = 2(h_{Gr}(U, U))^2 = 2 \end{aligned}$$

である. よって, この計量に関して複素射影空間は正則断面曲率一定で, その値は 2 である.

3 複素グラスマン多様体の部分多様体と正則ベクトル束の関係

M をケーラー多様体で, $f: M \rightarrow Gr_p(\mathbb{C}^n)$ を M から複素グラスマン多様体への正則等長はめ込みとする. Gr の普遍商束 $Q \rightarrow Gr$ の f による誘導束 $f^*Q \rightarrow M$ を考える. $Gr_p(\mathbb{C}^n)$ の普遍商束 $Q \rightarrow Gr$ の正則切断全体の空間 $H^0(Q)$ は \mathbb{C}^n と同一視できるので, \mathbb{C}^n の元は $f^*Q \rightarrow M$ の正則切断を生成する. そして束準同型

$$M \times \mathbb{C}^n \longrightarrow f^*Q : (x, t) \longmapsto t(x)$$

は全射になる.

逆に, ケーラー多様体 M 上の正則ベクトル束 $V \rightarrow M$ と, その正則切断全体の空間の部分空間 $W \subset H^0(V)$ が与えられ, 束準同型

$$ev: M \times W \longrightarrow V : (x, t) \longmapsto t(x)$$

が全射であると仮定する. この仮定を満たすとき, W は V を大域的に生成しているという. この時, 各 $x \in M$ に対して線形写像 $ev_x: W \rightarrow V_x: t \mapsto t(x)$ は全射である. したがって, その核 $\text{Ker}(ev_x)$ は W の部分空間で, その次元を p とすると, p は x に依存しない. このことから, 次のような正則写像が定義される:

$$f: M \longrightarrow Gr_p(W) : x \longmapsto \text{Ker}(ev_x)$$

命題 3.1. 上記の仮定のもと, $Gr_p(W)$ 上の普遍商束を $Q \rightarrow Gr$ とし, その f による誘導束を $f^*Q \rightarrow M$ とすると,

$$V \cong f^*Q \quad \text{as holomorphic vector bundle}$$

が成り立つ. \square

以上のことから、ケーラー多様体 M から複素グラスマン多様体への正則写像と、 M 上の正則ベクトル束とそれを大域的に生成する正則切断の空間の部分空間のペア $(V \rightarrow M, W)$ との間には、自然な 1 対 1 対応がある。したがって特に部分多様体 $f: M \rightarrow Gr$ が与えられたとき、 Gr の普遍商束の誘導束 $f^*Q \rightarrow M$ に注目することにする。

4 主結果

以上の準備のもと、我々は次のような結果を得た。

定理 4.1 (K-Nagatomo[2]). $Gr_p(\mathbb{C}^n)$ を、 \mathbb{C}^n の p 次元部分空間全体の成す複素グラスマン多様体とする。 \mathbb{C}^n に自然なエルミート内積を入れ、それにより Gr にエルミート計量を定める。 M をコンパクトケーラー多様体とし、 $f: M \rightarrow Gr$ を正則等長はめ込みとする。今、 f による普遍商束の誘導束 $f^*Q \rightarrow M$ が射影的平坦であると仮定する。このとき、 M の正則断面曲率が $1/q$ 以上であることと、はめ込みの第 2 基本形式が平行になることは同値である。ここで、 q は普遍商束の階数である。□

今回は射影的平坦の定義として次のものを採用する。

定義 4.1. ベクトル束 $E \rightarrow M$ にある接続が存在して、その接続による曲率 R が恒等写像の 2 次微分形式倍になっているとき、 $E \rightarrow M$ は射影的平坦であるという。また、このようにして得られた接続のことを射影的平坦計量であるという。□

注意 4.2. 射影的平坦の定義から、 M 上のある 2 次微分形式 α が存在して、

$$R^{f^*Q}(U, \bar{V}) = \alpha(U, \bar{V})id_{f^*Q}, \quad U, V \in T_{1,0_x}M$$

が成り立つ。特に $U = V$ の場合を考えると、(2) 式より、

$$\alpha(U, \bar{U})id_{f^*Q} = R^{f^*Q}(U, \bar{U}) = -H_U K_{\bar{U}}$$

が成り立つ。したがって f^*Q の曲率は、左辺より特に全単射であり、右辺より次のような線形写像の合成である：

$$-H_U \circ K_{\bar{U}} : Q_x \longrightarrow S_x \longrightarrow Q_x.$$

この合成写像が全単射になるための必要条件は $p \geq q$ であり、そうでない場合は主結果の仮定を満たす部分多様体は存在しない。しかしながら $Gr_p(\mathbb{C}^n)$ と $Gr_q(\mathbb{C}^{n^*})$ が同型であるから、 $p \geq q$ としても一般性を失わない。

$p = n - 1$ として複素射影空間の場合を考える。この時普遍商束の階数は 1 であり、更に我々が定義した計量によって複素射影空間の正則断面曲率は常に 2 であるから、スケール変換によってこの結果は定理 1.1. と一致することがわかる。したがって、この結果は Ros による複素射影空間の部分多様体のピンチング定理を含む。

今回の結果では $f^*Q \rightarrow M$ が射影的平坦であると仮定したが、このベクトル束に別の仮定を与えたときにその部分多様体がどのようなものになるか考察するのが、今後の課題である。

参考文献

- [1] S. KOBAYASHI, Differential geometry of Complex Vector Bundles, Iwanami Shoten and Princeton University, Tokyo (1987)
- [2] I. KOGA AND Y. NAGATOMO, A Study of Submanifolds of Complex Grassmannian Manifold with Parallel Second Fundamental Form, a preprint
- [3] Y. NAGATOMO, Harmonic maps into Grassmannian manifolds, a preprint
- [4] A. ROS, A characterization of seven compact Kaehler submanifolds by holomorphic pinching, Annals of Mathematics. 121 (1985), 377–382.

Nadel type vanishing theorems and $\bar{\partial}$ -equations

松村 慎一 (鹿児島大学大学院 理工学研究科)

shinichi@sci.kagoshima-u.ac.jp

1 はじめに

本講演では, [Mat13] で得られた Nadel 型のコホモロジーの消滅定理について紹介する. 以下, X を n 次元のコンパクト Kähler 多様体, F を X 上の (正則) 直線束とする. 高次元の代数/複素幾何学では, コホモロジーの消滅定理が重要な役割を果たす. そのため目的に応じて, 様々なタイプの消滅定理が確立されてきた. 特に, 随伴束 $K_X \otimes F$ のコホモロジーに対する消滅定理は, その重要性から多くの研究がなされてきた. ここで, K_X は X の標準束 (正則 n -形式のなす直線束) である.

その中でも基本的な小平の消滅定理を復習しよう. 直線束 F が C^∞ -級の hermite 計量でその曲率が strictly positive なものを持つと仮定する. このとき, 以下の高次コホモロジーが消滅する:

$$H^i(X, K_X \otimes F) = 0 \quad \text{for any } i > 0.$$

これが所謂, 小平の消滅定理の主張である. 雑に言えば, 直線束の曲率の正值性が高次のコホモロジーの消滅を導いている訳である.

タイトルにある Nadel の消滅定理とは, この小平の消滅定理の特異計量 (singular metric) と乗数イデアル層 (multiplier ideal sheaf) を用いた一般化である. Nadel 型の定理は複素幾何で登場する所謂 L^2 -理論や $\bar{\partial}$ -方程式と関係が深く, 重要である. 近年, これらの理論は複素/代数幾何に多く応用されており, その重要性を増している. 本講演では, この Nadel の消滅定理について解説する. また, 最初に述べた通り, 新しい Nadel 型の消滅定理 ([Mat13, Theorem 1.1]) を紹介する.

2 特異計量と乗数イデアル層

まず Nadel の消滅定理を説明するために, 特異計量と乗数イデアル層を定義する. 簡単のため, 特別な特異計量だけを扱う. (より一般の定義などは [Dem] 参照.) 以下, 直線束 F の C^∞ -級の hermite 計量 g を固定する.

定義 (特異計量, 曲率). (1) X 上の L^1 -関数 φ に対して, $h := ge^{-\varphi}$ を F の特異計量と呼ぶ. また, φ を h の **weight** と呼ぶ.

(2) 特異計量 h の曲率 $\sqrt{-1}\Theta_h(F)$ を以下で定義する:

$$\sqrt{-1}\Theta_h(F) = \sqrt{-1}\Theta_g(F) + dd^c\varphi.$$

ここで, $\sqrt{-1}\Theta_g(F)$ は g の Chern 曲率, φ は h の weight である.

定義内の h の weight φ が C^∞ -級するとき, h は通常の C^∞ 級の計量となる. また, このとき, h の通常の Chern 曲率は定義内の右辺と一致する. よって, この曲率の定義は C^∞ -級の場合の自然な拡張になっている. 特異計量では weight φ の滑らかさを C^∞ -級の関数から L^1 -関数まで拡張している訳である. また, 曲率の定義に現れる $dd^c\varphi$ は φ の超関数として微分を意味する. (超関数としての微分が定義できるように, φ を L^1 -関数としている.) 従って, 曲率 $\sqrt{-1}\Theta_h(F)$ は一般には C^∞ -級の $(1, 1)$ -形式ではなく, $(1, 1)$ -カレントとなる.

$(1, 1)$ -カレントにも semi-positivity の概念が定義できるので, 特異計量の曲率にも semi-positivity が定義できる. 曲率 $\sqrt{-1}\Theta_h(F)$ が $(1, 1)$ -カレントとして semi-positive のとき, $\sqrt{-1}\Theta_h(F) \geq 0$ と書く. g を局所的に $g = e^{-f}$ と書いたとき, この semi-positivity の条件は, $f + \varphi$ が多重劣調和関数になることと同値である. (任意の複素直線に制限して劣調和関数になる関数を多重劣調和関数という. 詳しくは [Dem] を参照).

さて, 乗数イデアル層を定義する. ω を X 上の Kähler 形式とする. 十分に大きな定数 C に対して, $\sqrt{-1}\Theta_h(F) \geq -C\omega$ を満たす特異計量 h を考える. このとき, φ は C^∞ -関数を無視すれば多重劣調和になっている. そこで, h の乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h)$ を以下で定義する: 任意の開集合 U に対して,

$$\mathcal{I}(h)(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid |f|^2 e^{-2\varphi} \in L^1_{\text{loc}}(U)\}$$

ここで, $\mathcal{O}_X(U)$ は U 上の正則関数の集合である. 雑に言えば, 乗数イデアル層は h の特異性を正則関数の L^2 -可積分性で測っているのである.

この節の最後に, 特異計量/乗数イデアル層の具体例を与える. $\{s_i\}_{i=1}^N$ を F の正則切断とする. このとき, $\varphi := \log \sum_{i=1}^N |s_i|_g$ は L^1 -関数となる. ここで, $|s_i|_g$ は s_i の g に関する各点毎のノルムを意味する. このとき, 特異計量 $h := ge^{-\varphi}$ の曲率は (局所的に) $dd^c(\log \sum_{i=1}^N |s_i|)$ と書ける. 関数 $\log \sum_{i=1}^N |s_i|$ は多重劣調和なので, 特異計量 h の曲率は semi-positive である. 切断 s_i が共通の零点を持つとき, h は C^∞ -級にならない. つまり, 本質的に特異性を持つ. このように切断から定まる計量は特異計量の典型例である. このような計量の特異性は代数的に捉えられる. 従って, その乗数イデアル層なども代数的に記述することができる. 一方で, 重要でありながらも代数的には扱い難い計量も存在する. そのような計量を扱う際には, より解析的な議論が必要となる. 本講演ではこのような計量を扱う.

3 Nadel の消滅定理

以上の準備の下で, Nadel の消滅定理を説明する. この定理は, 乗数イデアル層 $\mathcal{I}(h)$ 付きの随伴束 $K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)$ に対する消滅定理である.

定理 1 (Nadel). h の曲率 (カレント) が真に正 ($\sqrt{-1}\Theta_h \geq \omega$) とする. この時, 以下のコホモロジーが消滅する.

$$H^i(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) = 0 \quad \text{for any } i > 0.$$

以下で, この定理と $\bar{\partial}$ -方程式の関係について説明する. そのため, 特異計量 h と Kähler 計量 ω に関する L^2 -空間を以下で定義する:

$$L_{(2)}^{n,i}(X, F)_{h,\omega} := \{u \mid u \text{ は } F\text{-値の } (n, i)\text{-形式で } \|u\|_{h,\omega}^2 < \infty \text{ を満たす. } \}$$

ここで, $\|u\|_{h,\omega}^2$ は各点毎のノルム $|u|_{h,\omega}^2$ を用いて, $\|u\|_{h,\omega}^2 := \int_X |u|_{h,\omega}^2 \omega^n$ で定義される L^2 -ノルムである. 適切な範囲では, $\bar{\partial}$ -作用素: $\bar{\partial}_i = \bar{\partial}: L_{(2)}^{n,i} \rightarrow L_{(2)}^{n,i+1}$ が定義できる. このとき, 定理内のコホモロジー $H^i(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h))$ は以下の空間と同型である:

$$H^i(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h)) \cong \text{Ker } \bar{\partial}_i / \text{Im } \bar{\partial}_{i-1}$$

従って, Nadel の消滅定理は, 任意の $\bar{\partial}$ -closed な $u \in L_{(2)}^{n,i}(X, F)_{h,\omega}$ に対して, $\bar{\partial}$ -方程式: $\bar{\partial}v = u$ が $\|v\|_{h,\omega}^2 < \infty$ なる解 v を持つことを意味する. つまり, Nadel の消滅定理が成立するかという問題は, $\bar{\partial}$ -方程式がノルム $\|\cdot\|_{h,\omega}$ で L^2 -可積分な解を持つかという問題である. 実際, Nadel の消滅定理は, 曲率が strictly positive という仮定の下で, $\bar{\partial}$ -方程式が L^2 -評価付きで解けることから従う (例えば, [Dem82] を参照).

4 主結果と証明

h の曲率が semi-positive の場合 ($\sqrt{-1}\Theta_h(F) \geq 0$) に, Nadel 型の消滅定理を研究することは (様々な意味で) 興味深い. 曲率が semi-positive の計量の中で, “特異性が最小” となる特異計量が存在する. これを最小特異計量 (minimal singular metric) といい, h_{\min} と表す. 実は, h が最小特異計量 h_{\min} の場合には, 曲率が半正であっても Nadel 型の消滅定理が期待される. その根拠は以下の通りである:

- (a) $\mathcal{I}(h_{\min})$ の代数的な対応物である漸近的乗数イデアル層 $\mathcal{I}(\|F\|)$ (asymptotic multiplier ideal) に対しては Nadel 型の消滅定理が成立する ([DEL00]).
- (b) $\mathcal{I}(h_{\min})$ の上半連続化 $\mathcal{I}_+(h_{\min})$ に対しては, Nadel 型の消滅定理が成立する. (この場合は曲率が真に正の場合に容易に帰着できる.)

$\mathcal{I}_+(h_{\min})$ については [DEL00] を参照. $\mathcal{I}(h_{\min})$ と $\mathcal{I}_+(h_{\min})$ が一致するかは今のところ未解決である. この問題は, ごく最近に解決が宣言された Demailly-Kollár の the openness conjecture と関係が深い. この予想については [Ber13], [DK01] を

参照. では, $\mathcal{I}(h_{\min})$ に対しても Nadel 型の消滅定理が成立するだろうか. 今回の講演では, この自然な問いについて考える. この最小特異計量は, 重要な対象でありながら, 以下の点で扱いが困難であり, Nadel 型の消滅定理についても証明が与えられていなかった.

- (1) h_{\min} の曲率は (自明な場合を除いて) strictly positive ならない.
- (2) h_{\min} は代数的な特異性を持つとは限らないので, より解析的な扱いを必要とする.

[Mat13] では, 上の問題を肯定的に解決した (以下の定理). 本講演では, この結果について紹介したい. また, 時間が許す限り, 上の (1), (2) の難しさをどのように解決したのか, その証明についても解説する.

定理 2 (M.). 直線束 F が巨大 (*big*) であると仮定する (この仮定は必要であり, 真っ当である). この時, 以下のコホモロジーが消滅する.

$$H^i(X, K_X \otimes F \otimes \mathcal{I}(h_{\min})) = 0 \quad \text{for any } i > 0.$$

証明の概略.

[アイデア] 調和積分論を用いる. 調和形式に正則な切断を掛けたものが調和形式になるか (Kollár の単射性定理の榎による証明) と, $\bar{\partial}$ -方程式を解く技術を組み合わせる. (Kollár の単射性定理については [Kol86], その榎による証明については [Eno90] を参照.) (1), (2) のせいで曲率が半正とも限らない計量を扱う必要がある. この困難の解決が解析的に新しい部分である.

[Step 1] まず, h を Zariski 開集合上 C^∞ -級の計量 $\{h_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ で近似する. コホモロジーの元を代表する F -値の (n, i) -形式 u を取る. 次に, u を h_ε に関して調和的部分 u_ε とそれ以外の部分 $\bar{\partial}v_\varepsilon$ を用いて, $u = u_\varepsilon + \bar{\partial}v_\varepsilon$ と分解できることを示す. $u_\varepsilon = 0$ がわかれば, $\bar{\partial}$ -方程式が解けたことになり, 主張が従う.

[Step 2] F の冪 F^m の正則な切断 s をとる. 次に, 中野の等式と単射性定理のアイデアを用いて, su_ε が調和形式に “近い” ことに示す. (h_ε の曲率は半正とは限らないので, この Step で今までと異なる解析を行う.)

[Step 3] s を掛けたおかげで, $\bar{\partial}$ -方程式 $\bar{\partial}\beta_\varepsilon = su_\varepsilon$ が解ける. この際, h の特異性の最小性から β_ε の L^2 -ノルムは有界になるような解 β_ε が構成できる.

[Step 4] 以上の議論から su_ε の L^2 -ノルムが 0 に近づくことがわかる. そこから u_ε が 0 の収束することが示せて, u の $\bar{\partial}$ -完全性がわかる.

References

- [Ber13] B. Berndtsson. *The openness conjecture for plurisubharmonic functions*. Preprint, arXiv:1305.5781v1 .
- [DEL00] J.-P. Demailly, L. Ein, R. Lazarsfeld. *A subadditivity property of multiplier ideals*. Michigan Math. J. **48** (2000), 137–156.
- [Dem] J.-P. Demailly. *Analytic methods in algebraic geometry*. Compilation of Lecture Notes on the web page of the author, December 2009.
- [Dem82] J.-P. Demailly. *Estimations L^2 -pour l'opérateur $\bar{\partial}$ -d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète*. Ann. Sci. École Norm. Sup(4). **15** (1982), 457–511.
- [DK01] J.-P. Demailly, J. Kollár. *Semicontinuity of complex singularity exponents and Kähler-Einstein metrics on Fano orbifolds*. Ann. Sci. École Norm. Sup(4) **34** (2001), 525–556.
- [Eno90] I. Enoki. *Kawamata-Viehweg vanishing theorem for compact Kähler manifolds*. Einstein metrics and Yang-Mills connections (Sanda, 1990), 59–68.
- [Kol86] J. Kollár. *Higher direct images of dualizing sheaves. I*. Ann. of Math. (2) **123** (1986), no. 1, 11–42.
- [Les12] J. Lesieutre. *The diminished base locus is not always closed*. Preprint, arXiv:1212.3738v1.
- [Mat13] S. Matsumura. *A Nadel vanishing theorem for metrics with minimal singularities on big line bundles*. Preprint, arXiv:1306.2497v1.
- [Mat13] S. Matsumura. *An injectivity theorem with multiplier ideal sheaves of singular metrics with transcendental singularities*. Preprint.
- [Nad90] A. M. Nadel. *Multiplier ideal sheaves and Kähler-Einstein metrics of positive scalar curvature*. Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 3, 549–596.
- [Nak] N. Nakayama. *Zariski-decomposition and abundance*. MSJ Memoirs, **14**. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

Author: Shin-ichi Matsumura

e-mail : shinichi@sci.kagoshima-u.ac.jp, mshinichi0@gmail.com

コメント, 質問, 歓迎します.

階数1の非コンパクト型対称空間内の逆平均曲率流

酒井 勇輔

東京理科大学大学院理学研究科数学専攻

1 序

本講演の内容は、小池直之先生 (東京理科大学) との共同研究に基づく。 M を n 次元の (C^∞) 閉多様体, (N, \bar{g}) を $(n+1)$ 次元の (C^∞) 完備リーマン多様体とする。また,

$$F_t : M \hookrightarrow (N, \bar{g}) \quad (t \in [0, T))$$

を N への (C^∞) 閉超曲面はめ込みの C^∞ 級の 1 パラメータ族とする。写像 $F : M \times [0, T) \rightarrow (N, \bar{g})$ を $F(p, t) := F_t(p)$ ($(p, t) \in M \times [0, T)$) により定義し, また, $M_t := F_t(M)$ ($t \in [0, T)$) とおく。はめ込みの族 F_t ($t \in [0, T)$) が次の発展方程式を満足しているとき, その族を逆平均曲率流と呼ぶ:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{H} \nu \quad (\text{IMCF})$$

ここで, ν は超曲面 M_t の外向きの単位法ベクトル場を表し, H は M_t の $-\nu$ に関する平均曲率を表す。また, (IMCF) を逆平均曲率流方程式と呼ぶ。さらに, 各超曲面 M_t は平均凸, すなわち $M \times [0, T)$ 上で $H > 0$ を満たすと仮定する。いかなる平均凸である閉超曲面に対しても, それを発する逆平均曲率流が短時間において存在することが Huisken-Polden [9] によって示されている。

N がユークリッド空間の場合は, Gerhardt [2] により, 平均凸である閉超曲面を発する逆平均曲率流が全時間で存在し, 相似的に発展する球面解に漸近することが示されている。また, Huisken-Ilmanen [8] により, 平均凸かつ星状型の閉超曲面に対し, それを発する逆平均曲率流に沿う平均曲率の次のような下からの評価式が得られている。

定理 ([8]). $F : M \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ をユークリッド空間 \mathbb{R}^{n+1} 内の平均凸かつ星状型の閉超曲面を発する逆平均曲率流で, F_0 の支持関数 w_0 が, ある正定数 R_1, R_2 に対して $0 < R_1 \leq w_0 \leq R_2$ を満たすようなものとする。このとき, $M \times [0, \infty)$ 上で

$$\frac{1}{Hw} \leq C(n) \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}}, 1 \right\} \frac{1}{R_1} [\text{vol}(M_0)]^{\frac{1}{n}}$$

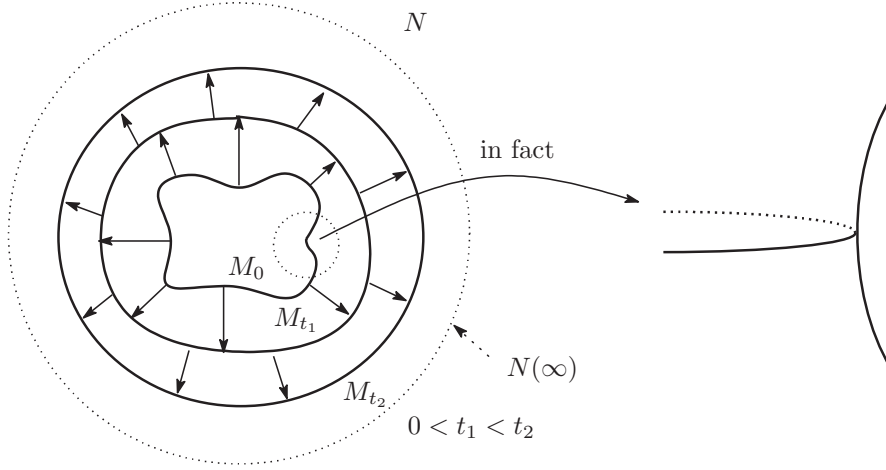
および

$$H \geq \frac{\min \{\sqrt{t}, 1\}}{C(n)} \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2}} [\text{vol}(M_0)]^{-\frac{1}{n}}$$

が成立する。ここで, $C(n)$ は n のみに依存する正定数である。

一方, N が双曲空間の場合, Gerhardt [4] により, 平均凸かつ星状型の超曲面を発する逆平均曲率流が全時間で存在することが示されている。

本講演の目的は, N が階数1の非コンパクト型対称空間の場合に, Huisken-Ilmanen [8] の結果に類似して, 平均凸かつ星状型の閉超曲面を発する逆平均曲率流に沿う平均曲率の下からの評価式を得ることである (定理5を参照)。



2 基本的な幾何学量の発展方程式

本節では、逆平均曲率流に沿う様々な幾何学量に関する発展方程式について述べる。記法は [11] の流儀に従う。 M を n 次元の開多様体、 (N, \bar{g}) を $(n+1)$ 次元の完備なリーマン多様体とし、 $F_t : M \hookrightarrow N$ ($t \in [0, T)$) を逆平均曲率流とする。 $\bar{\nabla}$ をリーマン計量 \bar{g} の Levi-Civita 接続とし、 $\bar{\nabla}^{F_t}$, $\bar{\nabla}^F$ をそれぞれ写像 F_t, F に沿う $\bar{\nabla}$ の引き戻し接続とする。はめ込み F_t により誘導される M の幾何学量には、添字 t を付す。つまり、 g_t を F_t による誘導計量、 ∇^t を g_t の誘導接続、 $d\mu_t$ を g_t の体積要素、 ν_t を M_t の外向きの単位法ベクトル場、 h_t を M_t の $-\nu_t$ に関する第2基本形式、 A_t を M_t の $-\nu_t$ に関する形作用素とする。

M 上のベクトルバンドル E に対し、 E の切断全体の集合を $\Gamma(E)$ と表し、自然な射影 $\pi_M : M \times [0, T) \rightarrow M$ による E の引き戻しバンドルを $\pi_M^* E$ と表す。 $S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M))$ に対し、 $\frac{\partial S}{\partial t} \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M))$ を

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{(p,t)} := \frac{dS_{(p,t)}}{dt} \quad ((p,t) \in M \times [0, T))$$

により定義する。ここで、 $T^{(0,2)}M$ は M の $(0,2)$ 次テンソルバンドル、 $\frac{dS_{(p,t)}}{dt}$ はベクトル値関数 $t \mapsto S_{(p,t)} \in T^{(0,2)}M$ の微分を表す。また、 $g, h \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M))$, $A \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(1,1)}M))$ をそれぞれ

$$g_{(p,t)} := (g_t)_p, \quad h_{(p,t)} := (h_t)_p, \quad A_{(p,t)} := (A_t)_p \quad ((p,t) \in M \times [0, T))$$

により定義する。 $\pi_M^*(TM)$ の接続 ∇ を

$$\begin{aligned} \nabla_V W &:= \nabla_V^t W_{(\cdot,t)} \quad (V \in (\pi_M^*(TM))_{(p,t)} ((p,t) \in M \times [0, T)), \quad W \in \Gamma(\pi_M^*(TM))), \\ \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} W \right)_{(p,t)} &:= \frac{dW_{(p,t)}}{dt} \quad ((p,t) \in M \times [0, T)) \end{aligned}$$

により定義する。ここで、 $\frac{dW_{(p,t)}}{dt}$ はベクトル値関数 $t \mapsto W_{(p,t)} \in T_p M$ の微分を表す。

$(U, (x^1, \dots, x^n))$ を M の局所座標とし、 $e_0 := \nu_t$, $e_i := dF_t(\frac{\partial}{\partial x^i})$ ($i = 1, \dots, n$) とおく。 $S \in \Gamma(\pi_M^*(T^{(0,2)}M))$ に対し、 $S, \frac{\partial S}{\partial t}$ の $(U, (x^1, \dots, x^n))$ に関する成分をそれぞれ S_{ij} , $\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)_{ij}$ と表す。また、 $\bar{S} \in F^*(T^{(0,s)}N)$ に対し、 \bar{S} の (e_0, e_1, \dots, e_n) に関する成分を $\bar{S}_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ ($0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_s \leq n$) と表す。

以上の準備のもと、 $g, d\mu, \nu, h, H$ に関する発展方程式は、次のように記述される。ここで、(4) を導出する際に

Simons の恒等式 ([13]) を用いることを注意しておく.

補題 1. (1) $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{2}{H}h$
(2) $\frac{d}{dt}[d\mu] = d\mu$
(3) $\bar{\nabla}_{\partial_t}^F \nu = \frac{1}{H^2}dF(\text{grad } H)$
(4)
$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}[h_{ij}] = -\frac{2}{H^3}\nabla_i H \cdot \nabla_j H + \frac{1}{H^2} \left((\nabla\nabla H)_{ij} + H \sum_{k,l=1}^n h_{jk}g^{kl}h_{il} - H\bar{R}_{0ij0} \right) \\ &= \frac{1}{H^2}(\Delta h)_{ij} - \frac{2}{H^3}\nabla_i H \cdot \nabla_j H - \frac{2}{H}\bar{R}_{0ij0} + \frac{1}{H^2}(\|A\|^2 + \bar{\text{Ric}}_{00})h_{ij} \\ &\quad - \frac{1}{H^2} \sum_{k,l,a,b=1}^n (\bar{R}_{kial}h_{bj} + \bar{R}_{kjal}h_{ib} - 2\bar{R}_{kij a}h_{lb})g^{kl}g^{ab} - \frac{1}{H^2} \sum_{k,l=1}^n ((\bar{\nabla} \bar{R})_{k0jil} + (\bar{\nabla} \bar{R})_{i0lkj})g^{kl} \end{aligned}$$

(5) $\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{H^2}\Delta H - \frac{2}{H^3}\|\text{grad } H\|^2 - \frac{1}{H}(\|A\|^2 + \bar{\text{Ric}}_{00})$

ここで, Δ は ∇ に関するラプラス作用素を表し, $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} := \sum_{\epsilon=0}^n \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\epsilon}g_{\epsilon\delta}$ ($\bar{R} = \{\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\epsilon}\}$ は \bar{g} のリーマン曲率テンソル), $\bar{\text{Ric}}_{00} := \sum_{i,j=1}^n \bar{R}_{0ij0}g^{ij}$ である.

3 支持関数の発展方程式

本節以降, $N = G/K$ を最小の断面曲率が $4c (< 0)$ であるような階数 1 の非コンパクト型対称空間 (つまり, $N = \mathbb{F}H^m(4c)$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{Q}, m \geq 2$), または, $\mathbb{O}H^2(4c)$) とし, (\mathfrak{g}, θ) を G/K に随伴する直交対称リー代数とし, $\mathfrak{p} := \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$ とおく. ここで, \mathfrak{p} は接空間 $T_eK(G/K)$ (e は G の単位元) と同一視されることを注意しておく. eK は初期データ M_0 の内部領域に属していると仮定しても一般性を失わない. 簡単のため, $p_0 := eK$ とおく. M_t の支持関数 w_t を

$$w_t(p) := \bar{g}_{F(p,t)} \left(c'_{v(p,t)}(1), \nu(p,t) \right) \quad (p \in M)$$

により定義する. ここで, $v(p,t) := \exp_{p_0}^{-1}(F(p,t))$ であり, $c_{v(p,t)}$ は $v(p,t) \in T_{p_0}(G/K)$ 方向の極大測地線を表す. $M \times [0, T)$ 上の関数 w を $w(p,t) := w_t(p)$ ($(p,t) \in M \times [0, T)$) により定義する. $M \times [0, T)$ 上で $w > 0$ であるとき, F を星状型解と呼ぶ.

$N = G/K$ は階数 1 の非コンパクト型対称空間であるので, N 内の ξ 方向の測地線 c_ξ に沿うヤコビ場 J は

$$J(s) = P_{c_\xi}|_{[0,s]} \left(D_{s\xi}^{co}(J(0)) + sD_{s\xi}^{si} \left(\frac{DJ}{ds}(0) \right) \right) \quad (1)$$

と記述される ([14] 参照). ここで, $P_{c_\xi}|_{[0,s]}$ は $\bar{\nabla}$ に関する $c_\xi|_{[0,s]}$ に沿う平行移動を表し, $\frac{D}{ds}$ は引き戻し接続 $\bar{\nabla}^{c_\xi}$ を表し, $D_{s\xi}^{co}, D_{s\xi}^{si}$ は次式によって定義される \mathfrak{p} の線型変換を表す:

$$D_{s\xi}^{co} := \cosh(s \cdot \text{ad}(\xi)), \quad D_{s\xi}^{si} := \frac{\sinh(s \cdot \text{ad}(\xi))}{s \cdot \text{ad}(\xi)} \quad (\text{ad} : \mathfrak{g} \text{ の随伴表現を表す})$$

また, \mathfrak{p} の線型変換 $Q_{\xi,\cdot}^{co}, Q_{\xi,\cdot}^{si}$ を次式により定義する:

$$Q_{\xi,\cdot}^{co} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{l=1}^{2k} \text{ad}(\xi)^{l-1} \circ \text{ad}(\cdot) \circ \text{ad}(\xi)^{2k-l}, \quad Q_{\xi,\cdot}^{si} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \sum_{l=1}^{2k+1} \text{ad}(\xi)^{l-1} \circ \text{ad}(\cdot) \circ \text{ad}(\xi)^{2k+1-l}$$

簡単のため, $X := d(\exp_{p_0}^{-1})(\nu)$ とおく. 補題 1 の発展方程式, および, ヤコビ場の記述 (1) を用いて, 次の w に関する発展方程式を得る.

補題 2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & \frac{1}{H^2} \Delta w + \frac{2}{H} \bar{g} (D_v^{co}(X), D_v^{si}(X)) + \frac{\|A\|^2}{H^2} w - \frac{1}{H^2} \bar{g} \left(\text{Tr}_g^\bullet \left(\left(Q_{v, (D_v^{co} \circ (D_v^{si})^{-1})}^\bullet \circ (D_v^{si})^{-1} \right) (\bullet) \right), D_v^{si}(X) \right) \\ & + \frac{1}{H^2} \bar{g} \left(\text{Tr}_g^\bullet \left(\left(D_v^{co} \circ (D_v^{si})^{-1} \circ Q_{v, (D_v^{co} \circ (D_v^{si})^{-1})}^{si} \circ (D_v^{si})^{-1} \right) (\bullet) \right), D_v^{si}(X) \right) \\ & - \frac{2}{H^2} \text{Tr} \left((dF_t)^{-1} \circ \text{pr}_{dF_t(TM)} \circ D_{c'_v(1)}^{co} \circ (D_{c'_v(1)}^{si})^{-1} \circ dF_t \circ A \right) \end{aligned}$$

が成立する. ここで, $\text{Tr}_g^\bullet(\cdot)$ は \bullet の位置で g に関するトレースを取ることを表し, $\text{pr}_{dF_t(TM)}$ は $F_t^*(TN)$ から $dF_t(TM)$ への射影を表す.

補題 1, 2 の発展方程式を用い, 最大値原理の証明における議論を行うことにより, 逆平均曲率流に沿う支持関数 w_t に関する次の評価式を得る.

補題 3. $0 < R_1 \leq w_0 \leq R_2$ (R_1, R_2 は正定数) とする. このとき, $M \times [0, T)$ 上で次の評価式が成立する;

$$\frac{1}{2\sqrt{-c}} \text{arcsinh} \left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right) \leq w \leq \frac{1}{\sqrt{-c}} \text{arcsinh} \left(e^{\frac{t}{n}} \sinh(\sqrt{-c}R_2) \right)$$

4 平均曲率の下からの評価

前節で示した補題 2, 3 を組み合わせることにより, 初期データ F_0 の支持関数 w_0 が $(0 <) R_1 \leq w_0$ を満たしているとき, 速度調節関数 $u := \frac{1}{Hw}$ に関する次のような L^p 評価を導くことができる.

定理 4. $(0 <) R_1 \leq w_0$ のとき, 速度調節関数 u の L^p ノルムは, n, p のみに依存する定数 $C(n, p)$ を用いて, 以下のように評価される:

$$\|u_t\|_{L^p(M)} \leq \frac{e^{\frac{2}{p}t}}{\sqrt{\left(\int_M u_0^p d\mu_0\right)^{-\frac{2}{p}} + C(n, p)[\text{vol}(M_0)]^{-\frac{2(n+p)}{np}} \Psi_p(t)}}$$

ただし, $\Psi_p(t) := \frac{1}{-4c} \int_0^t \text{arcsinh}^2 \left(e^{\frac{\tau}{n}} \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right) e^{\frac{2(n-p)}{np}\tau} d\tau$ とおいた.

定理 4 を導く過程で, Hoffman-Spruck [6] によるリーマン部分多様体に対する Sobolev の不等式を用いる. その際に, $N = G/K$ が階数 1 という仮定が必要とされる.

補題 2, 3, および, 定理 4 を用いて, 平均曲率 H に関する次のような下からの評価式を得ることができる.

定理 5. $F : M \times [0, T) \rightarrow N$ を階数 1 の非コンパクト型対称空間 $N = G/K$ 内の平均凸かつ星状型の n 次元閉超曲面を發する逆平均曲率流で, F_0 の支持関数 w_0 が, ある正定数 R_1, R_2 に対して $0 < R_1 \leq w_0 \leq R_2$ を満たすようなものとする. このとき, $M \times [0, T)$ 上で

$$\frac{1}{Hw} \leq \rho(t)$$

および

$$H \geq \frac{\sqrt{-c}}{\text{arcsinh}(e^{\frac{t}{n}} \sinh(\sqrt{-c}R_2))\rho(t)}$$

が成り立つ. ここで, $\rho(t)$ は

$$\rho_1(t) := \begin{cases} \hat{C}(2) \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{q_0})} e^{\frac{t}{r}} [\text{vol}(M_0)]^{-\frac{1}{r}} \frac{1}{\left(\int_M u_0^{2r} d\mu_0\right)^{-\frac{1}{r}} + C(n, 2r)[\text{vol}(M_0)]^{-\frac{n+2r}{nr}} \Psi_{2r}(\frac{t}{2})} & (t \leq 2, n = 2), \\ \hat{C}(2) e^{\frac{t}{r}} [\text{vol}(M_0)]^{-\frac{1}{r}} \frac{1}{\left(\int_M u_0^{2r} d\mu_0\right)^{-\frac{1}{r}} + C(n, 2r)[\text{vol}(M_0)]^{-\frac{n+2r}{nr}} \Psi_{2r}(t-1)} & (t \geq 2, n = 2), \\ \check{C}(n) \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{q_0})} e^{\frac{t}{r}} [\text{vol}(M_0)]^{-\frac{1}{r}} \frac{1}{\left(\int_M u_0^{2r} d\mu_0\right)^{-\frac{1}{r}} + C(n, 2r)[\text{vol}(M_0)]^{-\frac{n+2r}{nr}} \Psi_{2r}(\frac{t}{2})} & (t \leq 2, n \geq 3), \\ \check{C}(n) e^{\frac{t}{r}} [\text{vol}(M_0)]^{-\frac{1}{r}} \frac{1}{\left(\int_M u_0^{2r} d\mu_0\right)^{-\frac{1}{r}} + C(n, 2r)[\text{vol}(M_0)]^{-\frac{n+2r}{nr}} \Psi_{2r}(t-1)} & (t \geq 2, n \geq 3) \end{cases}$$

($\hat{C}(n), \check{C}(n)$ はそれぞれ n のみに依存する定数) を用いて

$$\rho(t) := \max \left\{ 1, \left(\frac{2}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \right\} \sqrt{\rho_1(t)} \\ + \bar{C}(n) \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{2}{t}} \right\} \left(\frac{1}{2\sqrt{-c}} \operatorname{arcsinh} \left(\exp \left(\max \left\{ \frac{t}{2n}, \frac{t-1}{n} \right\} \right) \sinh(2\sqrt{-c}R_1) \right) \right)^{-1} e^{\frac{t}{n}} [\operatorname{vol}(M_0)]^{\frac{1}{n}}$$

($\bar{C}(n)$ も n のみに依存する定数) により定義される関数である. ここで, q_0 は

$$n = 2 \text{ のとき, 開区間 } (1, 2) \text{ に属する任意の定数, } \quad n \geq 3 \text{ のとき, } q_0 := \frac{n+2}{n}$$

であり, r は $\frac{q_0}{q_0-1}$ よりも大きい任意の定数である.

参考文献

- [1] Q. Ding: *The Inverse Mean Curvature Flow in Rotationally Symmetric Spaces*, Chin. Ann. Math., **32** (2011), 27–44.
- [2] C. Gerhardt: *Flow of Nonconvex Hypersurfaces into Spheres*, J. Differential Geom., **32** (1990), 299–314.
- [3] C. Gerhardt : *Curvature Problems*, Series in Geometry and Topology, **39**, International Press (2006).
- [4] C. Gerhardt: *Inverse Curvature Flows in Hyperbolic Space*, J. Differential Geom., **89** (2011), 487–527.
- [5] R. S. Hamilton: *Three-manifolds with Positive Ricci Curvature*, J. Differential Geom., **17** (1982), 255–306.
- [6] D. Hoffman & J. Spruck: *Sobolev and Isoperimetric Inequalities for Riemannian Submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 715–727.
- [7] G. Huisken: *Contracting Convex Hypersurfaces in Riemannian Manifolds by Their Mean Curvature*, Invent. Math., **84** (1986), 463–480.
- [8] G. Huisken & T. Ilmanen: *Higher Regularity of the Inverse Mean Curvature Flow*, J. Differential Geom., **80** (2008), 433–451.
- [9] G. Huisken & A. Polden: *Geometric Evolution Equations for Hypersurfaces*, Calculus of variations and geometric evolution problems (Cetraro, 1996), 45–84; Lecture Notes in Math., **1713**, Springer, Berlin (1999).
- [10] N. Koike: *Tubes of Non-Constant Radius in Symmetric Spaces*, Kyushu J. Math., **56** (2002), 267–291.
- [11] N. Koike: *The Mean Curvature Flow for Invariant Hypersurfaces in a Hilbert Space with a Free Group Action*, arXiv:math.DG/1210.2539v1 (2012).
- [12] N. V. Krylov: *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*, Dordrecht: Reidel (1987).
- [13] J. Simons: *Minimal Varieties in Riemannian Manifolds*, Ann. of Math., **88** (1968), 62–105.
- [14] C. L. Terng & G. Thorbergsson: *Submanifold Geometry in Symmetric Spaces*, J. Differential Geom., **42** (1995), 665–718.
- [15] X. P. Zhu: *Lectures on Mean Curvature Flows*, Studies in Advanced Mathematics, **32**, AMS/IP (2002).

COARSE RICCI CURVATURE ON THE SPACE OF PROBABILITY MEASURES

東北大学大学院理学研究科 北別府悠

1. 序

Riemann 多様体上の断面曲率及び Ricci 曲率はその上の確率測度のなす Wasserstein 空間といわれる距離空間上の幾何学及び解析学と関係が深いことが示されている. 例えば非負曲率を持つ Alexandrov 空間上の Wasserstein 空間は再び非負曲率の Alexandrov 空間になることが知られている [5]. その観察から多様体の微分構造を使わず, Wasserstein 空間上の言葉で曲率, 特に Ricci 曲率の定義をすることが可能になった. Ricci 曲率の下限条件は Lott-Villani, Sturm らによって**曲率次元条件**と呼ばれる測度付きの距離空間に対して定義されるものに一般化された [3, 5]. ここでは詳しく述べないが, 曲率次元条件は Wasserstein 空間上のある特別な関数の凸性と Ricci 曲率の下限の深い関係を利用して定義される.

Wasserstein 空間は一般的には無限次元空間なので自然な測度を考えることが難しいが von Renesse-Sturm によって entropic measure と呼ばれる確率測度が単位区間上の Wasserstein 空間の上に構成された. 単位区間は曲率次元条件の意味で非負 Ricci 曲率を持つので, Alexandrov 空間の場合の類似から, 単位区間上の Wasserstein 空間と entropic measure の組が曲率次元条件の意味で非負の Ricci 曲率を持つと予想するのは自然なことである. しかし残念ながら, 単位区間上の Wasserstein 空間は曲率次元条件の意味で, Ricci 曲率の下限を持たないということが示された.

さて Ricci 曲率の別の定義として Ollivier は [4] において距離空間とその上の random walk と呼ばれる確率測度の族のペア $(X, d, \{m_x\}_{x \in X})$ に対して空間上の異なる二点 $x, y \in X$ の *coarse Ricci 曲率* $\kappa(x, y)$ というものを定義した. Coarse Ricci 曲率に関しても曲率次元条件と同様の問題を考えることが出来る. その際 Wasserstein 空間上に random walk を構成しなければならないが, 自然な random walk を構成することが出来, 元の空間の下限の情報が Wasserstein 空間上の coarse Ricci 曲率の下限に遺伝することを示した. 以下このことを詳しく述べる.

2. WASSERSTEIN 空間

以下距離空間といえば常に**完備可分距離空間**を指すことにする. また X 上の Borel 確率測度全体の集合を $\mathcal{P}(X)$ で表すことにする. 二つの確率測度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ に対して, その *coupling* $\pi \in \mathcal{P}(X \times X)$ というものを

$$(2.1) \quad \begin{cases} \pi(A \times X) = \mu(A), \\ \pi(X \times A) = \nu(A) \end{cases}$$

が任意の Borel 集合 $A \subset X$ に対して成り立つようなものとして定める. 確率測度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ に対して, その coupling 全体の集合を $\Gamma(\mu, \nu)$ で表す. 例えば μ, ν の直積測度は (2.1) を満たすので, $\Gamma(\mu, \nu)$ は常に空ではない. 次の定義をする.

定義 2.1. $1 \leq p < \infty$ とする. 確率測度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ に対して次の関数 W_p を考える.

$$W_p(\mu, \nu) := \left\{ \int_{X \times X} d(x, y)^p \pi(dx, dy) ; \pi \in \Gamma(\mu, \nu) \right\}^{1/p}.$$

この関数 W_p は次の集合 $\mathcal{P}_p(X)$ の任意の二元に対して常に有限の値をとる.

$$\mathcal{P}_p(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) ; \int_X d(x, o)^p \mu(dx) < \infty \text{ for some } o \in X \right\}.$$

W_p は距離の公理を満たすことが示されるので $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$ は距離空間になる. この距離空間を L^p -Wasserstein 空間と呼ぶ.

例 2.2. Dirac 測度に対して $W_p(\delta_x, \delta_y) = d(x, y)$ が成り立つ.

距離空間 X 上の各点 $x \in X$ でパラメータ付けられた確率測度の族 $\{m_x\}_{x \in X} \subset \mathcal{P}(X)$ を *random walk* と呼ぶ.

定義 2.3 (Coarse Ricci curvature [4]). $(X, d, \{m_x\}_{x \in X})$ を random walk 付き距離空間とする. 任意の異なる二点 $x, y \in X$ に対して, xy に沿った p -coarse Ricci 曲率 $\kappa_p(x, y)$ を

$$\kappa_p(x, y) := 1 - \frac{W_p(m_x, m_y)}{d(x, y)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

で定める.

注意 2.4. Ollivier は $p = 1$ の場合を定義した. ここでは形式的に一般の $1 \leq p < \infty$ で定義しておく.

定義だけからではなぜこの量が Ricci 曲率の名を冠されているのか一見して分からないが, 次の定理により名称が妥当であることを納得していただけたらと思う.

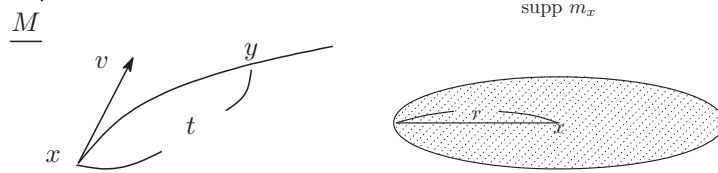
定理 2.5 ([4]). M を Riemann 多様体, d, vol をそれぞれ Riemann 計量から定まる Riemann 距離関数, Riemann 測度とする. 一点 $x \in X$ と x 上の単位接ベクトル $v \in U_x M$ を任意にとり, 固定する. 点 $x \in X$ から v 方向の測地線を引き, 測地線上の点 y をとる. M 上の random walk $\{m_x\}_{x \in M}$ を

$$m_x := \frac{\chi_{B_r(x)}}{vol(B_r(x))} vol$$

で定める. この random walk を r -step random walk と呼ぶ. ここで $B_r(x)$ は x 中心の半径 $r > 0$ の開球であり, $\chi_{B_r(x)}$ はその特性関数である. このとき $(M, d, \{m_x\}_{x \in M})$ の coarse Ricci 曲率は

$$\kappa_1(x, y) = \frac{r^2 \text{Ric}(v, v)}{N(N+2)} + O(r^3 + r^2 d(x, y)) \quad \text{as } r \rightarrow 0, y \rightarrow x$$

を満たす.



上の定理は Riemann 多様体に対する結果であるが, 一般の測度距離空間が曲率次元条件を満たせば, r -step random walk に関する coarse Ricci 曲率は下限を持つことが知られている.

3. 確率測度空間上の COARSE RICCI 曲率

$(X, d, \{m_x\}_{x \in X})$ を random walk 付きの距離空間とする. L^p -Wasserstein 空間上に random walk を構成する. 確率測度を構成するには任意の有界連続関数に対して積分をきちんと定めれば良い. 確率測度 $\mu \in \mathcal{P}_p(X)$ に対して, 確率測度 \tilde{m}_μ を

$$(3.1) \quad \int_{\mathcal{P}_p(X)} f(\sigma) \tilde{m}_\mu(d\sigma) := \int_X f(m_x) \mu(dx)$$

で定める. ここで f は $\mathcal{P}_p(X)$ 上の任意の有界連続関数である. これにより $\mathcal{P}(\mathcal{P}_p(X))$ の元 \tilde{m}_μ が $\mu \in \mathcal{P}_p(X)$ 毎に定義出来る.

定理 3.1. $(X, d, \{m_x\}_{x \in X})$ を random walk 付きの距離空間とする. $(\mathcal{P}_p(X), W_p, \{\tilde{m}_\mu\}_{\mu \in \mathcal{P}_p(X)})$ を L^p -Wasserstein 空間と (3.1) で構成した random walk のペアとする. $\{m_x\}_{x \in X}$ に関する coarse Ricci 曲率を κ_p^m , $\{\tilde{m}_\mu\}_{\mu \in \mathcal{P}_p(X)}$ に関する coarse Ricci 曲率を $\kappa_p^{\tilde{m}}$ とおく. このとき $\{\tilde{m}_\mu\}_{\mu \in \mathcal{P}_p(X)} \subset \mathcal{P}_p(\mathcal{P}_p(X))$ であり,

$$\inf_{x, y \in X} \kappa_p^m(x, y) = \inf_{\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(X)} \kappa_p^{\tilde{m}}(\mu, \nu)$$

が成り立つ.

この定理により曲率次元条件と coarse Ricci 曲率はかなり性質の異なるものであることが分かる. 精確な言い方ではないが, 曲率次元条件よりも coarse Ricci 曲率の下限条件の方が弱いと見ることが出来る.

4. 証明の概略

この章では証明で中心的な役割を果たす定理を述べる. 一般に次が成り立つ.

定理 4.1 (Kantorovich duality cf. [6]). (X, d) を距離空間とする. $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ に対して, 集合 $\Phi_{d^p}(\mu, \nu)$ を次を満たす関数 $(\phi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$ のペアとする. すなわち

$$\phi(x) + \psi(y) \leq d^p(x, y)$$

が μ -a.e. x , かつ ν -a.e. y で成り立つようなものとする. このときある関数のペア $(\phi_0, \psi_0) \in \Phi_{d^p}(\mu, \nu)$ が存在し,

$$\begin{aligned} W_p(\mu, \nu)^p &= \inf \left\{ \int_X \phi d\mu + \int_X \psi d\nu ; (\phi, \psi) \in \Phi_{d^p}(\mu, \nu) \right\} \\ &= \int_X \phi_0 d\mu + \int_X \psi_0 d\nu \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明はまず κ^m の下限を κ_0 などと置き, Kantorovich duality を使うことで $\inf \kappa^m \geq \kappa_0$ を示す. この際, 集合の可測性などが問題になるが, 空間 X が完備可分距離空間であることが有効に働き可測性が示され, 不等式が証明出来る. 逆の不等式も計算で示すことが出来る.

REFERENCES

- [1] Yu Kitabeppu, *Lower bound of coarse Ricci curvature on metric measure spaces and eigenvalues of Laplacian*, To appear Geom. Dedicata.
- [2] Yu Kitabeppu, *Coarse Ricci curvature on the space of probability measures*, preprint.
- [3] John Lott and Cédric Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991.
- [4] Yann Ollivier, *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*, J. Funct. Anal. **256** (2009), no. 3, 810–864.
- [5] Karl-Theodor Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I, II*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–177.
- [6] Cédric Villani, *Optimal transport*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 338, Springer-Verlag, Berlin, 2009. Old and new.

〒 980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3
E-mail address: sa9m11@math.tohoku.ac.jp

Estimates for eigenvalues of the clamped plate problem

Guoxin Wei

In this talk, we will give some estimations for eigenvalues of the clamped plate problem. This talk is based on my two joint papers with Prof. Q.-M. Cheng (Fukuoka University), one joint paper with Dr. G. Huang (Henan Normal University) and Prof. Q.-M. Cheng.

1 Background

Let Ω be a bounded domain in an n -dimensional complete Riemannian manifold M^n . Assume that Γ_i is the i^{th} eigenvalue of a *clamped plate problem*, which describes characteristic vibrations of a clamped plate:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = \Gamma u, & \text{in } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Δ is the Laplacian on M^n and ν denotes the outward unit normal to the boundary $\partial\Omega$. It is well known that this problem has a real and discrete spectrum

$$0 < \Gamma_1 \leq \Gamma_2 \leq \cdots \leq \Gamma_k \leq \cdots \nearrow +\infty,$$

where each Γ_i has finite multiplicity which is repeated according to its multiplicity.

2 Universal inequalities for lower order eigenvalues

When M^n is an n -dimensional Euclidean space \mathbf{R}^n , for lower order eigenvalues of the clamped plate problem (1.1), Ashbaugh [2] announced the following two universal inequalities without proofs. Cheng, Ichikawa and Mametsuka [4] have given their proofs.

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^n (\Gamma_{i+1}^{\frac{1}{2}} - \Gamma_1^{\frac{1}{2}}) \leq 4\Gamma_1^{\frac{1}{2}},$$

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^n (\Gamma_{i+1} - \Gamma_1) \leq 24\Gamma_1.$$

When M^n is a general complete Riemannian manifold other than the Euclidean space, it is natural to consider the following problem:

Problem. Let M^n be an n -dimensional complete Riemannian manifold and Ω a bounded domain in M^n . Whether can one obtain a universal inequality for lower order eigenvalues, which are analogous to (2.2), of the clamped plate problem?

According to the following Nash's theorem.

Theorem 2.1 (Nash) *Each complete Riemannian manifold can be isometrically immersed in a Euclidean space.*

We can construct appropriate test functions, then we can use the Rayleigh-Ritz inequality and prove the following:

Theorem 2.2 (Q. -M. Cheng, G. Huang and G. Wei, [5]) *Let Ω be a bounded domain in an n -dimensional complete Riemannian manifold M^n . For the lower order eigenvalues of the clamped plate problem:*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \Gamma u, & \text{in } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

we have

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^n (\Gamma_{i+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \leq (4\Gamma_1^{\frac{1}{2}} + n^2 H_0^2)^{\frac{1}{2}} \{(2n+4)\Gamma_1^{\frac{1}{2}} + n^2 H_0^2\}^{\frac{1}{2}},$$

where H_0^2 is a nonnegative constant which only depends on M^n and Ω .

Corollary 2.1 *When M^n is an n -dimensional complete minimal submanifold in a Euclidean space, we have*

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^n (\Gamma_{i+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \leq \{8(n+2)\Gamma_1\}^{\frac{1}{2}}.$$

Corollary 2.2 *When M^n is an n -dimensional unit sphere, we have*

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^n (\Gamma_{i+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \leq (4\Gamma_1^{\frac{1}{2}} + n^2)^{\frac{1}{2}} \{(2n+4)\Gamma_1^{\frac{1}{2}} + n^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Remark 2.1 *For the unit sphere $S^n(1)$, by taking $\Omega = S^n(1)$, we know $\Gamma_1 = 0$ and $\Gamma_2 = \dots = \Gamma_{n+1} = n^2$. Hence, our inequalities become equalities. Thus, our above results are sharp.*

3 Lower bounds for eigenvalues

For the eigenvalues of the clamped plate problem (1.1), Agmon [1] and Pleijel [13] gave the following asymptotic formula,

$$(3.1) \quad \Gamma_k \sim \frac{16\pi^4}{(B_n \text{vol}(\Omega))^{\frac{4}{n}}} k^{\frac{4}{n}}, \quad k \rightarrow \infty,$$

where B_n denotes the volume of the unit ball in \mathbf{R}^n , $\text{vol}(\Omega)$ denote the volume of Ω . From the formula (3.1), it is not difficult to infer

$$(3.2) \quad \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Gamma_j \sim \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(B_n \text{vol}(\Omega))^{\frac{4}{n}}} k^{\frac{4}{n}}, \quad k \rightarrow \infty.$$

By an analogy to Conjecture of Pólya about the Dirichlet eigenvalue problem, one can propose the following

Conjecture. *If Ω is a bounded domain in \mathbf{R}^n , then the eigenvalue Γ_k of the clamped plate problem (1.1) satisfy*

$$(3.3) \quad \Gamma_k \geq \frac{16\pi^4}{(B_n \text{vol}(\Omega))^{\frac{4}{n}}} k^{\frac{4}{n}}, \quad \text{for } k = 1, 2, \dots.$$

When M^n is an n -dimensional Euclidean space \mathbf{R}^n , by the Fourier transformation and a lemma of Hörmander, Levine and Protter [11] proved that the eigenvalues of the clamped plate problem (1.1) satisfy

$$(3.4) \quad \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Gamma_j \geq \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(B_n \text{vol}(\Omega))^{\frac{4}{n}}} k^{\frac{4}{n}}.$$

The formula (3.2) shows that the coefficient of $k^{\frac{4}{n}}$ is the best possible constant. From the formula (3.4), we have

$$(3.5) \quad \Gamma_k \geq \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(B_n \text{vol}(\Omega))^{\frac{4}{n}}} k^{\frac{4}{n}},$$

which gives a partial solution for the above conjecture with a factor $\frac{n}{n+4}$. It is interesting and very important to find the second term on k of the asymptotic expansion formula of Γ_k . By using of symmetric rearrangement and Fourier transform, we have improved the result of Levine and Protter [11] (that is, (3.4)).

Theorem 3.1 (Q.-M. Cheng and G. Wei, [7]) *Let Ω be a bounded domain with a piecewise smooth boundary $\partial\Omega$ in \mathbf{R}^n . Eigenvalue Γ_j 's of the clamped plate problem (1.1) satisfy*

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Gamma_j \geq & \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(B_n \text{vol}(\Omega))^{\frac{4}{n}}} k^{\frac{4}{n}} \\ & + \frac{n+2}{12n(n+4)} \frac{\text{vol}(\Omega)}{I(\Omega)} \frac{n}{n+2} \frac{4\pi^2}{(B_n \text{vol}(\Omega))^{\frac{2}{n}}} k^{\frac{2}{n}} \\ & + \frac{(n+2)^2}{1152n(n+4)^2} \left(\frac{\text{vol}(\Omega)}{I(\Omega)} \right)^2, \end{aligned}$$

where $I(\Omega)$ is the moment of inertia of Ω , i.e. $I(\Omega) = \min_{a \in \mathbf{R}^n} \int_{\Omega} |x-a|^2 dx$.

4 Upper bounds for eigenvalues

In this section, we discuss upper bounds for eigenvalues of the clamped plate problem. From our knowledge, there is no any result on upper bounds for eigenvalue Γ_k with optimal order of k . In [9], Cheng and Yang have established a recursion formula in order to obtain upper bounds for eigenvalues of the Dirichlet eigenvalue problem of the Laplacian. Hence, if one can get a sharper universal inequality for eigenvalues of the clamped plate problem, we can also derive an upper bound for eigenvalue Γ_k by making use of the recursion formula due to Cheng and Yang [9]. On the investigation of universal inequalities for eigenvalues of the clamped plate problem, Payne, Pólya and Weinberger [12] proved

$$\Gamma_{k+1} - \Gamma_k \leq \frac{8(n+2)}{n^2k} \sum_{i=1}^k \Gamma_i.$$

Chen and Qian [3] and Hook [10], independently, extended the above inequality to

$$\frac{n^2k^2}{8(n+2)} \leq \sum_{i=1}^k \frac{\Gamma_i^{\frac{1}{2}}}{\Gamma_{k+1} - \Gamma_i} \sum_{i=1}^k \Gamma_i^{\frac{1}{2}}.$$

Recently, answering a question of Ashbaugh [2], Cheng and Yang [8] have proved the following remarkable estimate:

$$\sum_{i=1}^k (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i) \leq \left(\frac{8(n+2)}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^k (\Gamma_i(\Gamma_{k+1} - \Gamma_i))^{\frac{1}{2}}.$$

Furthermore, Wang and Xia [14] have proved

$$\sum_{i=1}^k (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)^2 \leq \frac{8(n+2)}{n^2} \sum_{i=1}^k (\Gamma_{k+1} - \Gamma_i)\Gamma_i.$$

Moreover, Qing-Ming Cheng has conjectured the following

Conjecture. Eigenvalue Γ_j 's of the clamped plate problem (1.1) satisfy

$$(4.1) \quad \sum_{j=1}^k (\Gamma_{k+1} - \Gamma_j)^2 \leq \frac{8}{n} \sum_{j=1}^k (\Gamma_{k+1} - \Gamma_j)\Gamma_j.$$

If one can solve the above conjecture, then from the recursion formula of Cheng and Yang [9], we can derive an upper bound for the eigenvalue Γ_k with the optimal order of k .

By using a fact that eigenfunctions of the clamped plate problem (1.1) form an orthonormal basis of the Sobolev Space $W_0^{2,2}(\Omega)$, we get an upper bound for eigenvalues of the clamped plate problem (1.1).

Theorem 4.1 (Q.-M. Cheng and G. Wei, [7]) *Let Ω be a bounded domain with a smooth boundary $\partial\Omega$ in \mathbf{R}^n . Then there exists a constant $r_0 > 0$ such that eigenvalues of the clamped plate problem (1.1) satisfy*

$$(4.2) \quad \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Gamma_j \leq \frac{1 + \frac{4(n+4)(n^2+2n+6)}{n+2} \frac{\text{vol}(\Omega_{r_0})}{\text{vol}(\Omega)}}{\left(1 - \frac{\text{vol}(\Omega_{r_0})}{\text{vol}(\Omega)}\right)^{\frac{n+4}{n}}} \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(B_n \text{vol}(\Omega))^{\frac{4}{n}}} k^{\frac{4}{n}},$$

for $k \geq \text{vol}(\Omega)r_0^n$, where $\Omega_r = \left\{x \in \Omega \mid d(x) < \frac{1}{r}\right\}$, $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ denotes the distance function from the point x to the boundary $\partial\Omega$ of Ω .

Remark 4.1 *Since $\text{vol}(\Omega_{r_0}) \rightarrow 0$ when $r_0 \rightarrow \infty$, we know that the upper bound in the Theorem 4.1 is sharp in the sense of the asymptotic formula due to Agmon and Pleijel.*

Corollary 4.1 *Let Ω be a bounded domain with a smooth boundary $\partial\Omega$ in \mathbf{R}^n . If there exists a constant c_0 such that*

$$\text{vol}(\Omega_r) \leq c_0 \text{vol}(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} \frac{1}{r}$$

for $r > \text{vol}(\Omega)^{\frac{-1}{n}}$, then there exists a constant r_0 such that eigenvalues of the clamped plate problem (1.1) satisfy

$$(4.3) \quad \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \Gamma_j \leq \frac{n}{n+4} \frac{16\pi^4}{(B_n \text{vol}(\Omega))^{\frac{4}{n}}} \left(k^{\frac{4}{n}} + c_0 c(n) k^{\frac{3}{n}} \right),$$

for $k = \text{vol}(\Omega)r_0^n > c_0^n$, where $c(n)$ is a constant depended only on n .

References

- [1] S. Agmon, *On kernels, eigenvalues and eigenfunctions of operators related to elliptic problems*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 627-663.
- [2] M. S. Ashbaugh, *Isoperimetric and universal inequalities for eigenvalues, in spectral theory and geometry* (Edinburgh, 1998, E. B. Davies and Yu Safarov, eds.), London Math. Soc. Lecture Notes, 273 (1999),95-139.
- [3] Z. C. Chen and C. L. Qian, *Estimates for discrete spectrum of Laplacian operator with any order*. J.China Univ. Sci. Tech. 20 (1990), 259-266.
- [4] Q. -M. Cheng, T. Ichikawa and S. Mametsuka, *Inequalities for eigenvalues of Laplacian with any order*, Commun. Contemp. Math. 11 (2009), 639-655.

- [5] Q. -M. Cheng, G. Huang and G. Wei, *Estimates for lower order eigenvalues of a clamped plate problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations 38 (2010), 409-416.
- [6] Q. -M. Cheng and G. Wei, *A lower bound for eigenvalues of a clamped plate problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations 42 (2011), 579-590.
- [7] Q. -M. Cheng and G. Wei, *Upper and lower bounds for eigenvalues of the clamped plate problem*, J. Differential Equations 255 (2013), 220-233.
- [8] Q. -M. Cheng and H. C. Yang, *Inequalities for eigenvalues of a clamped plate problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 2625-2635.
- [9] Q. -M. Cheng and H. C. Yang, *Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian*, Math. Ann. 337 (2007), 159-175.
- [10] S. M. Hook, *Domain independent upper bounds for eigenvalues of elliptic operator*, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 615-642.
- [11] H. A. Levine and M. H. Protter, *Unrestricted lower bounds for eigenvalues for classes of elliptic equations and systems of equations with applications to problems in elasticity*, Math. Methods Appl. Sci. 7 (1985), no. 2, 210-222.
- [12] L. E. Payne, G. Pólya and H. F. Weinberger, *On the ratio of consecutive eigenvalues*, J. Math. Phys. 35 (1956), 289-298.
- [13] A. Pleijel, *On the eigenvalues and eigenfunctions of elastic plates*, Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950), 1-10.
- [14] Q. L. Wang, C. Y. Xia, *Universal bounds for eigenvalues of the biharmonic operator on Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. 245 (2007), 334-352.

Guoxin Wei
 School of Mathematical Sciences
 South China Normal University
 510631 Guangzhou
 People's Republic of China
 E-mail:weigx@scnu.edu.cn

輸送不等式と測度の集中現象

高津 飛鳥 (takatsu@math.nagoya-u.ac.jp)

名古屋大学多元数理科学研究科

概要：輸送不等式は2つの確率測度間のエネルギー状態の差をその距離で評価する不等式である。測度の集中不等式は任意の1-リップシッツ関数が定数関数にどの位近いかを測る不等式である。講演ではこの2つの不等式の関係性を考察する。

1 設定

以下, (X, d) は完備可分距離空間, ν はその上の測度とする。(断りが無い限り本稿で扱う測度と集合は常にボレルであるとする。) 3つ組 (X, d, ν) のことを測度距離空間と呼ぶ。

2 輸送不等式

この節では確率測度距離空間 (X, d, ν) 上の輸送不等式について定義と考察を与える。

輸送不等式は $X \times X$ 上の費用関数 c と X 上の確率測度のなす空間 $\mathcal{P}(X)$ 上のエネルギー汎関数 F を用いて

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} c(x, y) d\pi(x, y) \leq F(\mu), \quad \forall \mu \in \mathcal{P}(X)$$

と表される不等式である。ここで $\Pi(\mu, \nu)$ は μ と ν のカップリング—すなわち $X \times X$ 上の確率測度で各成分への射影が μ, ν であるもの—からなる集合である。例えば, c として距離関数の2乗を選び, F を ν を基測度とする相対エントロピー $H_\nu(\mu) := \int_X \frac{d\mu}{d\nu} \log \frac{d\mu}{d\nu} d\nu$ とすれば, この輸送不等式は μ におけるエネルギー状態 $H_\nu(\mu)$ を μ と ν の Wasserstein 距離 $W_2(\mu, \nu)$ で下から評価していると思わせる。

命題 2.1 ([11]) 任意の確率測度 $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(X)$ に対し

$$W_2(\mu_0, \mu_1) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \left(\int_{X \times X} d(x, y)^2 d\pi(x, y) \right)^{1/2}$$

と定めれば, W_2 は2次モーメントが有限な確率測度のなす集合

$$\mathcal{P}_2(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) \mid \exists x_0 \in X \text{ s.t. } \int_X d(x_0, x)^2 \mu(x) < \infty \right\}$$

上の距離関数となる。 W_2 を Wasserstein 距離関数 と呼ぶ。

以後, 輸送不等式の費用関数 c は距離関数の 2 乗とする.

注記 2.2 より一般に $p \in [1, \infty)$ に対し, 距離関数の p 乗を用いて定まる W_p は p 次モーメントが有限な確率測度のなす集合 $\mathcal{P}_p(X)$ 上の距離関数となるが, 本講演では $p = 2$ の場合のみを考える.

正確には汎関数 $H_\nu(\mu)$ は ν に絶対連続でない確率測度 μ に対しては定義されていないが, その場合は $H_\nu(\mu) := \infty$ と定義するのが自然である. なぜなら $\mu_{x,r}$ を中心が x , 半径が r である距離開球 $B(x, r)$ 上の一様確率測度とすれば, x に台を持つディラック測度 δ_x は $\mu_{x,r}$ の $r \rightarrow 0$ における極限と見なせ, さらに

$$H_\nu(\mu_{x,r}) = \int_{B(x,r)} \frac{1}{\nu[B(x,r)]} \log \left(\frac{1}{\nu[B(x,r)]} \right) d\nu = -\log(\nu[B(x,r)]) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$$

が成立つからである. (このとき輸送不等式は明らかに成立つので, 確率測度 μ の取り得る範囲を ν に絶対連続な確率測度のなす空間 $\mathcal{P}^{\text{ac}}(X, \nu)$ に制限しても良い.) また Jensen の不等式より $\mu \in \mathcal{P}^{\text{ac}}(X, \nu)$ に対し

$$H_\nu(\mu) = \int_X \frac{d\mu}{d\nu} \log \frac{d\mu}{d\nu} d\nu \geq \left(\int_X \frac{d\mu}{d\nu} d\nu \right) \log \left(\int_X \frac{d\mu}{d\nu} d\nu \right) \geq 0$$

が成立つので ν は H_ν の最小化子である.

上述のように, 輸送不等式中のエネルギー汎関数が H_ν で与えられるものは **Talagrand の不等式** と呼ばれ, 次のように定式化される.

定義 2.3 $\lambda > 0$ とする. 確率測度距離空間 (X, d, ν) が $T(\lambda)$ を満たすとは, 任意の確率測度 $\mu \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(X, \nu) := \mathcal{P}_2(X) \cap \mathcal{P}^{\text{ac}}(X, \nu)$ に対し

$$W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda} H_\nu(\mu)}$$

が成立つことである.

確率測度距離空間 (X, d, ν) が $T(\lambda)$ を満たす十分条件には, 例えば H_ν の Wasserstein 距離に関する λ -凸性がある.

定義 2.4 $K \in \mathbb{R}$ とする. 距離空間 (Y, d) 上の関数 $F : Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が K -凸であるとは $F \neq \infty$ かつ任意の 2 点 $y_0, y_1 \in Y$ に対しそれらを結ぶ最短測地線 $\{y_t\}_{t \in [0,1]}$ が存在して

$$F(y_t) \leq (1-t)F(y_0) + tF(y_1) - \frac{K}{2}t(1-t)d(y_0, y_1)^2$$

が任意の $t \in [0, 1]$ で成立することである.

注記 2.5 $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ に対し, f が K -凸であることと f のヘッセ行列の固有値が常に K 以上であることは同値である.

命題 2.6 (X, d, ν) を確率測度距離空間とし, $\lambda > 0$ とする. 相対エントロピー H_ν が $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$ 上で λ -凸ならば (X, d, ν) は $T(\lambda)$ を満たす.

証明. 任意の $\mu \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(X, \nu)$ に対し H_ν の λ -凸性より $\mu_0 = \mu, \mu_1 = \nu$ なる Wasserstein 測地線 $\{\mu_t\}_{t \in [0,1]}$ が存在して

$$H_\nu(\mu_t) \leq (1-t)H_\nu(\mu_0) + tH_\nu(\mu_1) - \frac{\lambda}{2}t(1-t)W_2(\mu_0, \mu_1)^2$$

が任意の $t \in [0, 1]$ で成立つ. ここで, $H_\nu(\mu_1) = 0 \leq H_\nu(\mu_t)$ なので移項して

$$t(1-t)W_2(\mu_0, \mu_1)^2 \leq \frac{2}{\lambda}(1-t)H_\nu(\mu_0)$$

となる. この式を $(1-t)$ で割り $t \rightarrow 1$ とした後, 平方根を取れば求める式が得られる. \square

注記 2.7 上の証明より, 汎関数 $F : \mathcal{P}_2(X) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ が $F(\nu) = 0$ かつ正数 λ に対して λ -凸であれば輸送不等式

$$W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda}F(\mu)} \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_2(X)$$

が成立することが分かる.

ではいつ相対エントロピーは K -凸になるか. 重付きリーマン多様体に対しては次の定理がある. ここで**重付きリーマン多様体**とは完備連結閉多様体 (M, g) とそのリーマン距離関数 d_g , および M 上の正測度 ω のなす3つ組 (M, d_g, ω) による測度距離空間のことである.

定理 2.8 ([4], [8]) (M, g) を完備連結閉多様体とし vol_g をそのとリーマン体積測度とする. このとき任意の $K \in \mathbb{R}$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して以下の2条件は同値である:

- (a) 任意の M の接ベクトル v に対し, $\text{Ric}_g(v, v) + \text{Hess}_g f(v, v) \geq K \cdot g(v, v)$ が成立.
- (b) $\omega := e^{-f} \text{vol}_g$ を基測度とする相対エントロピー H_ω は $(\mathcal{P}_2(M), W_2)$ 上 K -凸である.

例 2.9 ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 上の関数 $f(x) := (|x|^2 + n \log(2\pi))/2$ を考える. \mathcal{L}^n を \mathbb{R}^n 上のルベーグ測度とする. このとき $\gamma^n := e^{-f} \mathcal{L}^n$ は \mathbb{R}^n 上の標準ガウス測度であり, 任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\text{Ric}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(v, v) + \text{Hess}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} f(v, v) = \langle v, v \rangle$$

が成立つ. よって次元 n に依らず確率測度距離空間 $(\mathbb{R}^n, |\cdot - \cdot|, \gamma^n)$ は常に $\text{CD}(1, \infty)$ を満たす.

一般の測度距離空間では定理 2.8 の条件 (b) (或いは重付き多様体上では同値となるより強い条件) は曲率次元条件 $\text{CD}(K, \infty)$ と呼ばれ, $\text{CD}(K, \infty)$ を満たす測度距離空間はリッチ曲率が K 以上である有限次元多様体のように振舞う. 実際, 定理 2.8 において $f \equiv 0$ とすれば, (a) の条件はリッチ曲率が K 以上であることと同値である.

より一般に**曲率次元条件** $\text{CD}(K, N)$ は $K \in \mathbb{R}, N \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty]$ に対して定義され, 正の N に対して曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ を満たす測度距離空間はリッチ曲率が K 以上/次元が N 以下である多様体のように振舞う. ([4], [9] や [11] を参照.) 曲率次元条件は Wasserstein 空間上の汎関数族のある種の凸性を用いて定義され, その条件を確認するこ

とは容易でない. しかし重付き多様体 $(M, d_g, \omega := e^{-f} \text{vol}_g)$ ($f \in C^\infty(M)$) が曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ を満たすことは

$$\text{Ric}_{N,\omega} := \begin{cases} \text{Ric}_g + \text{Hess}_g f & (N = \infty) \\ \text{Ric}_g + \text{Hess}_g f - \frac{Df \otimes Df}{N - n} & (N \in (-\infty, 0) \cup (\dim M, \infty)) \\ \text{Ric}_g + \text{Hess}_g f - \infty \cdot (Df \otimes Df) & (N = \dim M, \text{ 但し } \infty \cdot 0 := 0 \text{ とする}) \end{cases}$$

なる 2-テンソルが任意の接ベクトル v に対し

$$\text{Ric}_{N,\omega}(v, v) \geq K \cdot g(v, v)$$

を満たすことと同値であり容易に判定ができる. そこで ω が確率測度であるとき, $F(\omega) = 0$ を満たす汎関数 $F: \mathcal{P}_2(M) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ の正数 λ に対する λ -凸性 がもし曲率次元条件から従えば, 命題 2.6 の証明同様に F に附随する輸送不等式を導くことが出来る. しかし残念なことに重付き多様体 (M, d_g, ω) 上において N が有限の場合, 曲率次元条件 $\text{CD}(K, N)$ は正数 λ に対する汎関数の λ -凸性を導かない. だが $\mu = \rho\omega \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(M, \omega)$ に対して

$$S_{\omega,N}(\mu) := -\frac{N^2}{N-1} \int_M \rho^{1-1/N} d\omega \quad \mu = \rho\omega \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(M)$$

と定義される N -Tsallis エントロピーの $\mathcal{P}_2^{\text{ac}}(X, \omega)$ 上における 0-凸性は曲率次元条件 $\text{CD}(0, N)$ と同値である. このことと ω を基測度とする相対エントロピー H_ω が vol_g を基測度とする相対エントロピー H_{vol_g} と f による位置エネルギー $\int_M f d\mu$ の和であることに着目すると次が成立つ. (以下の定理は主張を見やすくする為, いくつかの条件を省略し厳密性を欠いている. そのため定理ではなく“定理”として掲載する.)

“定理” 2.10 ([6]) Ψ を重付き多様体 $(M, d_g, \omega := e^{-f} \text{vol}_g)$ ($f \in C^\infty(M)$) 上の関数とし, $\dim M \geq 2$ とする. このとき任意の $K \in \mathbb{R}$ と $N \in (-\infty, -1) \cup [\dim M, \infty)$ に対して以下の 2 条件は同値である:

- (A) (M, d_g, ω) は $\text{CD}(0, N)$ を満たし, Ψ は K -凸である.
- (B) $S_{\omega,N}^\Psi(\mu) := S_{\omega,N}(\mu) + \int_M \Psi d\mu$ は $\mathcal{P}_2^{\text{ac}}(M, \omega)$ 上 K -凸である.

注記 2.11 $N \geq \dim M$ かつ $\Psi \equiv 0$, そして $K = 0$ とすれば定理 2.10 は $\text{CD}(0, N)$ に対する同値条件として既知である. ([4], [9] 参照.)

系 2.12 $\lambda > 0$, $N \in (-\infty, -1) \cup [\dim M, \infty)$ とする. 重付き多様体 $(M, d_g, \omega := e^{-f} \text{vol}_g)$ ($f \in C^\infty(M)$) が $\text{CD}(0, N)$ を満たし, その上の λ -凸である関数 Ψ が

$$\int_M \left(1 + \frac{1}{N} \Psi\right)^{-N} d\omega = 1$$

を満たすとし, さらに $N > 0$ のときは $\Psi > -N$ も仮定する. このとき

$$\nu := \left(1 + \frac{1}{N} \Psi\right)^{-N} \omega \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(M, \omega)$$

であれば, 任意の $\mu \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(M, \omega)$ に対して

$$W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda} (S_{\omega,N}^\Psi(\mu) - S_{\omega,N}^\Psi(\nu))} \quad (2.1)$$

が成立する.

証明. $\sigma := \frac{d\nu}{d\omega} = (1 + \frac{1}{N}\Psi)^{-N}$ とする. そして $u_N(r)$ を $S_{\omega, N}$ の密度関数, すなわち

$$u_N(r) := -\frac{N^2}{N-1}r^{1-1/N}$$

とすれば, これは狭義凸関数であり $u'_N(\sigma) = -N - \Psi$ である. よって任意の $\mu = \rho\omega \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(M, \omega)$ に対して

$$S_{\omega, N}^{\Psi}(\mu) - S_{\omega, N}^{\Psi}(\nu) = \int_M [u_N(\rho) - u_N(\sigma) - u'_N(\sigma)(\rho - \sigma)] d\omega \geq 0$$

が成立する. そこで汎関数 $F(\mu) := S_{\omega, N}^{\Psi}(\mu) - S_{\omega, N}^{\Psi}(\nu)$ を考えれば 定理 2.10 と注記 2.7 より主張が従う. \square

注記 2.13 N -Tsallis エントロピー $S_{\omega, N}$ に定数 $N^2/(N-1)$ を加えたものは $|N| \rightarrow \infty$ のとき, ω を基測度とする相対エントロピー H_{ω} を復元する. また

$$\left(1 + \frac{1}{N}\Psi\right)^{-N} \xrightarrow{|N| \rightarrow \infty} \exp(-\Psi)$$

なので, $|N| \rightarrow \infty$ のとき形式的には輸送不等式 (2.1) は確率測度 $\nu := \exp(-\Psi)\omega$ に対する Talagrand の不等式を復元する.

さらに $\text{Ric}_{\infty, \omega}$ の非負性を仮定し定理 2.10 において $|N| \rightarrow \infty$ とすれば, これは定理 2.8 の関数 $f := \Psi - \log(d\omega/d\text{vol}_g)$ に対する同値条件を復元する.

例 2.14 ユークリッド空間 \mathbb{R}^n とルベーグ測度 \mathcal{L}^n がなす測度距離空間を考える. そしてその上の関数 $\Psi(x) = |x|^2/2$ を考えれば, これらは定理 2.10 の仮定 (A) を $K = 1$ に対して満たす. さらに, $N \in (-\infty, 0) \cup [n, \infty)$ かつ $N \neq 2$ とすれば, n, N のみに依存する定数 c が存在して, $c/N < 1$ かつ

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + \frac{1}{N}(\Psi - c)\right)^{-N} dx = 1,$$

$$\left(1 + \frac{1}{N}(\Psi - c)\right)^{-N} \xrightarrow{|N| \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{|x|^2}{2} - \frac{n}{2} \log(2\pi)\right)$$

を満たす. さらに

$$\nu := \left(1 + \frac{1}{N}(\Psi - c)\right)^{-N} \mathcal{L}^n$$

とすれば $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ となる. ([10] 参照.) よって系 2.12 より輸送不等式

$$W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda}(S_{\omega, N}^{\Psi}(\mu) - S_{\omega, N}^{\Psi}(\nu))} \quad \forall \mu \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$$

が成立つ.

3 測度の集中現象

本節では確率測度距離空間 (X, d, ν) 上の測度の集中現象の定義および輸送不等式との関連を述べる. ここで測度の集中現象とは測度が $1/2$ 以上ある集合 A の r -開近傍 $A_r := \{x \in X \mid d(x, A) < r\}$ に測度がどれだけ集中しているかを表す不等式である.

定義 3.1 $\lambda > 0, \alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ とする. (X, d, ν) が**集中現象** $C(\alpha, \lambda)$ を満たすとは (X, d, ν) の**集中関数**

$$C_{(X, d, \nu)}(r) := \sup\{1 - \nu[A_r] \mid A \subset X \text{ s.t. } \nu[A] \geq 1/2\}$$

に対し,

$$C_{(X, d, \nu)}(r) \leq \alpha(\lambda r) \quad \forall r > 0$$

が成立することである.

例えば確率測度距離空間 $(\mathbb{R}^n, |\cdot - \cdot|, \gamma^n)$ は次元 n に依らず, $\alpha(r) := \exp(-r^2/2)$ に対して集中現象 $C(\alpha, 1)$ を満たす. そして確率測度距離空間が $\alpha(r) = \exp(-r^2/2)$ とある正数 λ に対して集中現象 $C(\alpha, \lambda)$ を満たすことを**ガウス型の集中現象を満たす**という.

測度の集中現象は以下の命題より (X, d) 上の 1-リプシッツ関数 F がどれだけ中央値 m_F に集中するか確率測度 ν を用いて表す不等式と捉えられる. ここで F の**中央値** m_F とは

$$\nu\{x \in X \mid F(x) \geq m_F\} \geq 1/2, \quad \nu\{x \in X \mid F(x) \leq m_F\} \geq 1/2$$

を満たす実数である.

命題 3.2 ([3]) 関数 $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ と確率測度距離空間 (X, d, ν) に対して以下の 2 条件は同値である:

- (1) 任意の $r > 0$ に対して $C_{(X, d, \nu)}(r) \leq \alpha(r)$ が成立.
- (2) (X, d) 上の 任意の 1-リプシッツ関数 F と $r > 0$ に対して

$$\nu\{x \in X \mid F(x) \geq m_F + r\} \leq \alpha(r)$$

が成立する.

ではいつ測度の集中現象が起きるか. 例えばガウス型の集中現象は $T(\lambda)$ から従う.

命題 3.3 確率測度距離空間 (X, d, ν) が正数 λ に対し $T(\lambda)$ を満たせばガウス型の集中現象を満たす.

証明. ある $\lambda' > 0$ が存在し, 測度が $1/2$ 以上である任意の部分集合 $A \subset X$ と任意の $r > 0$ に対し

$$1 - \nu[A_r] \leq \exp(-\lambda' r^2/2)$$

が成立つことを示せば良い. ここで $1 - \nu[A_r] = 0$ のときは明らかなので, $1 - \nu[A_r] \neq 0$ とする. そして

$$\mu := \frac{\chi_A}{\nu[A]}, \quad \mu_r := \frac{\chi_{X \setminus A_r}}{\nu[X \setminus A_r]} \quad (\chi_A \text{ は } A \text{ の特性関数})$$

とすれば, 任意のカップリング $\pi \in \Pi(\mu, \mu_r)$ の台は $A \times X \setminus A_r$ に含まれる. よって, Hölder の不等式より

$$r \leq d(A, X \setminus A_r) \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu_0, \mu_1)} \int_{X \times X} d(x, y) d\pi(x, y) \leq W_2(\mu, \mu_r)$$

が成立つ. さらに, W_2 に対する三角不等式と (X, d, ν) が $T(\lambda)$ を満たすことから

$$r \leq W_2(\mu, \mu_r) \leq W_2(\mu, \nu) + W_2(\nu, \mu_r) \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda} H_\nu(\mu)} + \sqrt{\frac{2}{\lambda} H_\nu(\mu_r)} \quad (3.1)$$

が成立する. ここで

$$H_\nu(\mu) = \int_A \frac{1}{\nu[A]} \log \frac{1}{\nu[A]} d\nu = \log \frac{1}{\nu[A]} \leq \log 2, \quad H_\nu(\mu_r) = -\log(1 - \nu[A_r])$$

なので, $r \geq 2\sqrt{2\log 2/\lambda}$ に対し (3.1) を移項し 2 乗, さらに指数を取れば

$$1 - \nu[A_r] \leq \exp\left(-\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}r - \sqrt{\log 2}\right)^2\right) \leq \exp\left(-\frac{\lambda}{8}r^2\right)$$

が成立する. また, $r < 2\sqrt{2\log 2/\lambda}$ に対しては

$$1 - \nu[A_r] \leq \frac{1}{2} < \exp\left(-\frac{\lambda}{8}r^2\right)$$

となるので任意の測度が $1/2$ 以上である部分集合 $A \subset X$ と任意の $r > 0$ に対し

$$1 - \nu[A_r] \leq \exp(-\lambda r^2/8)$$

が成立することが示された. □

この議論を系 2.12 に現れる輸送不等式 (2.1) に適用すると次を得る.

命題 3.4 ([6]) 測度距離空間 (X, d, ω) 上の関数 Ψ が

$$\nu := \left(1 + \frac{1}{N}\Psi\right)^{-N} \omega \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(X, \omega)$$

を満たすとし, また $N > 0$ のときは $\Psi > -N$ も仮定する. さらに ν が $F(\mu) := S_{\omega, N}(\mu) - S_{\omega, N}(\nu)$ に附随する輸送不等式を満たす, すなわちある正数 λ が存在し任意の $\mu = \rho\omega \in \mathcal{P}_2^{\text{ac}}(X, \omega)$ に対して

$$W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda}(S_{\omega, N}(\mu) - S_{\omega, N}(\nu))}$$

が成立すると仮定する.

- (1) $N > 0$ のとき, $\omega[X] < \infty$ を仮定すれば, N のみに依存する正定数 c_+ と, $\lambda, N, \omega[X]$ に依存する正定数 λ'_+ が存在して

$$C_{(X,d,\nu)}(r) \leq c_+ \cdot (1 - \lambda'_+ r^2)^{-N}$$

が任意の $r > 0$ に対して成立する.

- (2) $N < 0$ のとき, $\|\sigma\|_{L^\infty(\omega)} < \infty$ を仮定すれば, N のみに依存する正定数 c_- と, $\lambda, N, \|\sigma\|_{L^\infty(\omega)}$ に依存する正定数 λ'_- が存在して

$$C_{(X,d,\nu)}(r) \leq c_- \cdot (1 + \lambda'_- r^2)^N$$

が任意の $r > 0$ に対して成立する.

注記 3.5 上述の評価において $|N| \rightarrow \infty$ とすれば, ガウス型の集中現象を復元する. すなわち

$$c_+ (1 - \lambda'_+ r^2)^{-N}, c_- (1 + \lambda'_- r^2)^N$$

なる冪関数は共に $|N| \rightarrow \infty$ で指数関数に収束する.

4 測度の集中現象から輸送不等式へ

前節で見たように, 輸送不等式 $T(\lambda)$ はガウス型の集中現象を導く. 同様に適切な条件下で, $S_{\omega,N}^\Psi$ に附随する輸送不等式は $S_{\omega,N}^\Psi$ の最小化子 ν に対する冪型の測度の集中現象を導く. では逆は成立つか, すなわち測度の集中現象から輸送不等式は導けるか.

例えばある $K \in \mathbb{R}$ に対し曲率次元条件 $CD(K, \infty)$ を満たす重付き多様体上ではガウス型の集中現象が Talagrand の不等式を導く. ([2], [5], [7] 参照.) 実際には, 曲率次元条件 $CD(K, \infty)$ 下ではガウス型の集中現象は Talagrand の不等式より強い評価であるガウス型の等周不等式を導く.

また確率測度距離空間 (X, d, ν) が重付き多様体でなくさらに曲率次元条件を課さない場合でも, ガウス型の集中現象を満たせばある正定数 c_1, c_2 が存在して

$$W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{c_1 H_\nu(\mu) + c_2}$$

なるずれを許した輸送不等式を満たす. より一般に, 確率測度距離空間 (X, d, ν) 上で“良い”測度の現象が生じれば, あるエントロピー F とある正定数 c_1, c_2 が存在して

$$W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{c_1 F(\mu) + c_2}$$

なるずれを許した輸送不等式が成立することが既知である. ([1] 参照.)

では N -Tsallis エントロピーと位置エネルギーの和と見なせる $S_{\omega,N}^\Psi$ から導かれる冪型の測度の集中現象は, $S_{\omega,N}^\Psi$ に附随する輸送不等式またはずれを許した輸送不等式を導くか. 講演ではこのことに関する最近の結果を紹介する.

参考文献

- [1] N. Gozlan, C. Roberto and P-M. Samson, From concentration to logarithmic Sobolev and Poincaré inequalities, *J. Funct. Anal.* **260** (2011), 1491–1522.
- [2] M. Ledoux, The geometry of Markov diffusion generators, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*(6)**9** (2000),305–366, Probability theory.
- [3] M. Ledoux, The concentration of measure phenomenon, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [4] J. Lott and C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport, *Ann. of Math.* **169** (2009), 903–991.
- [5] E. Milman, Isoperimetric and concentration inequalities: Equivalence under curvature lower bound, *Duke Math. J.* **154** (2) (2010), 207–239.
- [6] S. Ohta and A. Takatsu, Displacement convexity of generalized relative entropies. II, to appear in *Comm. Anal. Geom.* Available at [arXiv:1112.5554](https://arxiv.org/abs/1112.5554).
- [7] F. Otto and C. Villani, Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality, *J. Funct. Anal.* **173** (2) (2000), 361–400.
- [8] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I, *Acta Math.* **196** (2006), 65–131.
- [9] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. II, *Acta Math.* **196** (2006), 133–177.
- [10] A. Takatsu, Behaviors of φ -exponential distributions in Wasserstein geometry and an evolution equation, to appear in *SIAM J. Math. Anal.* Available at [arXiv:1109.6776](https://arxiv.org/abs/1109.6776).
- [11] C. Villani, Optimal transport, old and new, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

Surfaces with inflection points in Euclidean 4-space¹

相山 玲子 (筑波大学数理物質系数学域)²

4次元 Euclid 空間 \mathbb{R}^4 内の曲面 M の各点 p における**曲率楕円** \mathcal{E}_p について考える. 曲率楕円 \mathcal{E}_p とは, 接平面 $T_p M$ 内の単位円の第2基本形式 Π による像である, 法空間 $T_p^\perp M$ 内の平均曲率ベクトル \mathbf{H}_p を中心とする楕円周である. (ただし, 線分に退化する場合もある.) 曲率楕円の面積は, 法曲率 $K_N(p)$ によって $\pi|K_N(p)|/2$ と表されている. $K_N(p) = 0$ である点 p は **semiumbilic point** と呼ばれる. 特に, \mathcal{E}_p が $T_p^\perp M$ 内の原点 $\mathbf{0}_p$ を通る直線上の線分に退化している場合は, p は **inflection point** であると言う³. すべての点が inflection point である曲面は, 局所的に, 可展面 (i.e. Gauss 曲率0の線織面) であるか3次元アフィン空間に含まれていることが知られていた (cf. [4]). 今回報告したい定理の1つは次の通りである.

定理 1 ([2]). \mathbb{R}^4 内で, Gauss 曲率 K がいたるところ0でなく, いたるところ inflection point である曲面は, 1つの3次元アフィン空間に含まれる.

特に極小曲面の場合には, Gauss 曲率に関する条件なしに, 次の定理が示せる.

定理 2 ([1]). \mathbb{R}^4 内で, いたるところ inflection point である極小曲面は, 1つの3次元アフィン空間に含まれる.

ところで, Mochida-Fuster-Ruas[5] は, generic な極小曲面には inflection point は存在しないことを示しており, [6] において, 極小曲面の inflection point の全体はどんな形で出てくるかという問題を提起している. 次の定理はこの問題に1つの解答を与えるものである.

定理 3 ([1]). \mathbb{R}^4 内の極小曲面において, その法曲率が非負あるいは非正である仮定の下では, 法曲率が恒等的に零でない限り, inflection point は孤立している.

この定理3は, 法曲率が非負あるいは非正であるという仮定なしには成立しない.

1 曲率楕円

S を連結な Riemann 面, X を S から \mathbb{R}^4 への共形はめ込みとして, 曲面 $M = X(S)$ を考える. e_1, e_2, e_3, e_4 を局所正規直交標構場で, e_1, e_2 は M に接し, e_3, e_4 は直交しているとす. 第2基本形式 $\Pi = (d^2 X \cdot e_3)e_3 + (d^2 X \cdot e_4)e_4$ の各成分を h_{ij}^α ($\alpha = 3, 4, i, j = 1, 2$) と書く. 平均曲率ベクトル \mathbf{H} は

$$\mathbf{H} = h^3 e_3 + h^4 e_4, \quad h^\alpha = \frac{1}{2}(h_{11}^\alpha + h_{22}^\alpha)$$

¹本稿は, 芥川和雄氏 (東工大理工) との共同研究 [1, 2] の内容をまとめたものである.

²e-mail: aiyama@math.tsukuba.ac.jp

³ $\mathbf{H}_p = \mathbf{0}$ である場合には, semiumbilic point と inflection point は同値な概念である.

と与えられている。単位接ベクトル $\xi_\theta = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ に対して、 $\Pi(\xi_\theta, \xi_\theta) = \boldsymbol{\eta}(\theta)$ と表すと、

$$\boldsymbol{\eta}(\theta) - \mathbf{H} = \begin{pmatrix} e_3 & e_4 \end{pmatrix} \mathcal{H} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(h_{11}^3 - h_{22}^3) & h_{12}^3 \\ \frac{1}{2}(h_{11}^4 - h_{22}^4) & h_{12}^4 \end{pmatrix}$$

となる。このとき、法曲率は $K_N = 2 \det \mathcal{H}$ である。 M の各点 p で、 $K_N(p) \neq 0$ のときは、 $\boldsymbol{\eta}(\theta) (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ は \mathbf{H}_p を中心とする楕円周を2周する軌跡を描く。($K_N(p) = 0$ のときは、軌跡は線分に退化している。) そこで、 $\boldsymbol{\eta}(\theta)$ の軌跡 \mathcal{E}_p は **曲率楕円** と呼ばれている。点 p が **inflection point** であるとは、曲率楕円が法空間内の原点を通る直線上の線分に退化している場合である。本研究では、inflection point の判別のために次の複素数値量を導入した。

$$\Lambda = -h^3 \varphi^4 + h^4 \varphi^3, \quad \varphi^\alpha = \frac{1}{2}(h_{11}^\alpha - h_{22}^\alpha) - \sqrt{-1} h_{12}^\alpha.$$

inflection point においては、任意の θ に対して、次が成り立つ。

$$0 = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}(\theta) & -\frac{1}{2} \frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} h^3 + \operatorname{Re}(\varphi^3 e^{\sqrt{-1}2\theta}) & \operatorname{Im}(\varphi^3 e^{\sqrt{-1}2\theta}) \\ h^4 + \operatorname{Re}(\varphi^4 e^{\sqrt{-1}2\theta}) & \operatorname{Im}(\varphi^4 e^{\sqrt{-1}2\theta}) \end{vmatrix}.$$

これは、 $h^3 + \varphi^3 e^{\sqrt{-1}2\theta}$ と $h^4 + \varphi^4 e^{\sqrt{-1}2\theta}$ が複素平面内の原点を通る同一直線上にあることを意味し、

$$0 = \operatorname{Im}\{(h^3 + \varphi^3 e^{\sqrt{-1}2\theta}) \overline{(h^4 + \varphi^4 e^{\sqrt{-1}2\theta})}\} = \operatorname{Im}\{\Lambda e^{\sqrt{-1}2\theta}\} + \frac{1}{2} K_N$$

を得る。

補題 1 ([2]). 点 p が inflection point であるための必要十分条件は $\Lambda(p) = 0$ である。

2 Gauss 写像

Hoffman-Osserman の論文 [3] に基づいて、Riemann 面 S からの Gauss 写像

$$\overline{G}: S \rightarrow Q_2 \subset \mathbb{C}P^3; \quad z \mapsto \begin{bmatrix} \partial X \\ \partial z \end{bmatrix}$$

を考える。ここで、 z は S の局所共形的パラメータで X による誘導計量は $\lambda^2 |dz|^2$ で与えられているものとする。また、 Q_2 は複素3次元射影空間 $\mathbb{C}P^3$ 内の2次曲面 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0$ であり、半径 $1/\sqrt{2}$ の球面 $S^2 = (S^2, g_0)$ の2つの直積として表されるものである。この分解に応じて、 \overline{G} は2つの $S^2 = \hat{\mathbb{C}}$ への写像の組 (f_1, f_2) として表現される:

$$\overline{G} = [(1 + f_1 f_2, \sqrt{-1}(1 - f_1 f_2), f_1 - f_2, -\sqrt{-1}(f_1 + f_2))].$$

Gauss 写像 \bar{G} によって, 曲面の Gauss 曲率 K 等を次のように表すことができる.

$$F_k = F(f_k) := \frac{(f_k)_{\bar{z}}}{1 + |f_k|^2}, \quad \hat{F}_k = \hat{F}(f_k) := \frac{(f_k)_z}{1 + |f_k|^2}, \quad J_k := \frac{2}{\lambda^2}(|F_k|^2 - |\hat{F}_k|^2) \quad (k = 1, 2)$$

$$K = J_1 + J_2, \quad K_N = J_1 - J_2, \quad |\mathbf{H}|^2 = \frac{2}{\lambda^2}(|F_1|^2 + |F_2|^2).$$

($\mathbf{H} \equiv 0$ の場合には, $F_1 \equiv F_2 \equiv 0$, すなわち f_1, f_2 は $\hat{\mathbb{C}}$ への正則関数であることを注意しておく.) さらに, 前節で導入した Λ は次のように表せる.

$$\text{補題 2 ([2]).} \quad \Lambda = \frac{\sqrt{-1}}{2\lambda^2} (F_1 \hat{F}_2 - \hat{F}_1 F_2)$$

定理 1 および 2 で, 曲面がある 3 次元アフィン空間に含まれることを示すにあたっては, 次の補題を利用する.

補題 3. (S^2, g_0) の向きを保つ等長変換 ϕ で, $\phi \circ f_1 = f_2$ をみたすものがあれば, 曲面 M はある 3 次元アフィン空間に含まれる.

これは, [3] の定理 5.3 の一部分で, Gauss 写像 \bar{G} の言葉で表現されている条件を f_1, f_2 で書き直したものである.

3 定理 1 の証明

Step 1 S の任意の点 p に対して, f_1, f_2 による g_0 の引き戻し $f_1^* g_0, f_2^* g_0$ が同じ誘導計量 g を定めている開近傍が存在することを示す: $\Lambda \equiv 0$ より $F_1 \hat{F}_2 - \hat{F}_1 F_2 \equiv 0$ である. よって, $|\mathbf{H}| \neq 0$ の点では, $(\hat{F}_1, \hat{F}_2) = \alpha(F_1, F_2)$ となる複素数 α が存在する. このとき, $K = \frac{2}{\lambda^2}(1 - |\alpha|^2)(|F_1|^2 + |F_2|^2)$ となるので, 仮定 $K \neq 0$ より $|\alpha| \neq 1$ をえる. また, $K_N = \frac{2}{\lambda^2}(1 - |\alpha|^2)(|F_1|^2 - |F_2|^2)$ となり, $K_N = 0$ であるから, $|F_1|^2 = |F_2|^2 \neq 0$ をえる. よって, f_1, f_2 は局所微分同型写像であり, さらに

$$\begin{aligned} f_k^* g_0 &= \frac{|df_k|^2}{(1 + |f_k|^2)^2} \\ &= |F_k|^2 \begin{pmatrix} d\xi & d\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + \operatorname{Re}(\alpha))^2 + \operatorname{Im}(\alpha)^2 & -2\operatorname{Im}(\alpha) \\ -2\operatorname{Im}(\alpha) & (1 - \operatorname{Re}(\alpha))^2 + \operatorname{Im}(\alpha)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

は $k = 1, 2$ の場合と同じ (非退化) 計量を局所的に定めていることがわかる. $|\mathbf{H}| = 0$ の点では, $|F_1| = |F_2| = 0$. このとき, $K \neq 0$ と $K_N = 0$ の条件から $|\hat{F}_1| = |\hat{F}_2| \neq 0$ が導かれ, その点でも $f_1^* g_0 = f_2^* g_0 \neq 0$ であることが確かめられる.

Step 2 Step 1 の結果から, S の任意の点 p に対して, (S^2, g_0) の向きを保つ等長変換 ϕ_p が存在して, $(\phi_p \circ f_1)(p) = f_2(p), d(\phi_p \circ f_1)(p) = df_2(p)$ となるようにできる. また, S の開近傍 U_p と S^2 の開近傍 V_p を適当にとつて, $\phi_p \circ f_1$ と f_2 は (U_p, g) から (V_p, g_0) への等長的微分同型写像であるとしてよい. よって, この開近傍 U_p 上では, $\phi_p \circ f_1 = f_2$ となる.

Step 3 $W = \{p \in S \mid (\phi_{p_0} \circ f_1)(p) = f_2(p)\}$ とおくと, W は空でない閉集合であることは明らかであり, 開集合であることを示して, $W = S$ を言う: W の任意の点 p に対して, 有限点列 $\{p_0, p_1, \dots, p_n = p\}$ をとって, $U_{p_{k-1}} \cap U_{p_k} \neq \emptyset$ であるようにできる. $U_{p_{k-1}} \cap U_{p_k}$ 上では $\phi_{p_{k-1}} \circ f_1 = f_2 = \phi_{p_k} \circ f_1$ であり, $f_1(U_{p_{k-1}} \cap U_{p_k})$ は (S^2, g_0) の3点以上からなる部分集合だから, $\phi_{p_{k-1}} = \phi_{p_k}$ となる. よって, $\phi_p = \phi_{p_0}$ であり, $U_p \subset W$ となる.

以上の結果と補題3から, 曲面 M はある3次元アファイン空間に含まれることがわかる.

□

4 定理2の証明

正則関数 $f_1, f_2 : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ は, 必要ならば (S^2, g_0) の向きを保つ等長変換を作用させたり局所共形パラメータ z をとりかえたりして, 次のように表すことができる.

$$f_1(z) = z^n \quad (n \geq 1), \quad f_2(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

$K_N \equiv 0$ より $|\hat{F}_1| \equiv |\hat{F}_2|$ で,

$$n^2 |z|^{2(n-1)} \{1 + |z|^2 |a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots|^2\}^2 = (1 + |z|^{2n})^2 |a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots|^2.$$

を得る. $n = 1$ のとき, $n = 2$ のとき ... と順番にこの式の両辺の係数を比較して, $f_1 \equiv f_2$ が導かれる. よって, 補題3から曲面 M はある3次元アファイン空間に含まれることが示される. □

5 定理3の証明

$K_N \geq 0$ すなわち $|\hat{F}_2| \geq |\hat{F}_1|$ と仮定する. 点 $z = 0$ を inflection point, すなわち $K_N(0) = 0$ であるとする (つまり, $|\hat{F}_2(0)| = |\hat{F}_1(0)|$ であり, $|(f_1)_z(0)| = |(f_2)_z(0)|$.) また, $f_1(0) = f_2(0) = 0$ であるとしてよい. この座標近傍 U 上で $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ の場合は, S 全体で $K_N \equiv 0$ となる. U 上で $f_1 \neq 0, f_2 \equiv 0$ の場合は, $|\hat{F}_2| \geq |\hat{F}_1|$ に矛盾する. U 上で $f_1 \equiv 0, f_2 \neq 0$ の場合は, $K_N = 0$ となる点は孤立した $z = 0$ のみであることは明らか. よって, U 上で $f_1 \neq 0, f_2 \neq 0$ の場合を考えればよい.

$$f_1(z) = z^n \quad (n \geq 1), \quad f_2(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \dots \quad (m \geq 1, a_m \neq 0)$$

とおいてかまわない.

$n = 1$ の場合, $|(f_1)_z(0)| = 1$ より $m = 1$ で $|(f_2)_z(0)| = |a_1| = 1$ である. よって, U 上で $(f_1)_z \neq 0, (f_2)_z \neq 0$ すなわち $\hat{F}_k \neq 0$ ($k = 1, 2$) としてよい. $u_k := \log |\hat{F}_k|$, $\varphi := u_2 - u_1$ とおくと, φ は U 上の非負関数で $\varphi(0) = 0$ かつ $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \varphi = -(|\hat{F}_2|^2 - |\hat{F}_1|^2) \leq 0$ をみたす. 優調和関数に関する Hopf の強最大値原理は, φ は U 上で恒等的に0であることを導くので, K_N は U 上さらに S 上で0でなければならないことがわかる.

$n \geq 2$ の場合, $|(f_1)_z(0)| = 0$ より $m \geq 2$. $|\hat{F}_2| \geq |\hat{F}_1|$ より $m \leq n$. $m \leq n - 1$ のとき, $|z| (\neq 0)$ が十分小さい点においては $|\hat{F}_2| > |\hat{F}_1|$ となるから, inflection point $z = 0$ は孤立している. $m = n$ のとき, $|\hat{F}_2| \geq |\hat{F}_1|$ より $|a_n| \geq 1$. $|a_n| > 1$ のとき, $|z| (\neq 0)$ が十分小さい点においては $|\hat{F}_2| > |\hat{F}_1|$ となるから, inflection point $z = 0$ は孤立している. $|a_n| = 1$ のとき, 前述の u_k は $z = 0$ で特異点をもつが, φ は U 上の滑らかな関数として定義され, 非負の優調和関数で $\varphi(0) = 0$ となっている. よって, K_N は U 上さらに S 上で 0 でなければならない. \square

6 孤立していない inflection point をもつ極小曲面の例

$\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ 内の最も簡単な極小曲面の例を与える複素解析的曲線については, その法曲率は非負あるいは非正であり, inflection point は孤立している. しかし, Gauss 写像が $(f_1, f_2) = (z, z + z^3) (|z| < \varepsilon)$ で与えられるような極小曲面を考えると, inflection point の全体は $z = 0$ で横断的に交わる二つの実解析的曲線として現れる. ただし, その法曲率 K_N は $z = 0$ の近傍で正負いずれの値もとりうるものになっている.

参考文献

- [1] R. Aiyama and K. Akutagawa, Semiumbilic points for minimal surfaces in Euclidean 4-space, to appear in **Geom. Dedicata** (2013).
- [2] R. Aiyama and K. Akutagawa, Surfaces with inflection points in Euclidean 4-space, preprint.
- [3] D. A. Hoffman and R. Osserman, The Gauss map of surfaces in \mathbb{R}^3 and \mathbb{R}^4 , **Proc. London Math. Soc.** **50** (1985), 27–56.
- [4] J. A. Little, On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean spaces, **Ann. Math. Pura Appl. (Ser. 4A)** **83** (1969), 261–335.
- [5] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas, The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint, **Geometriae Dedicata** **54** (1995), 323–332.
- [6] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster and M. A. S. Ruas, Some global properties of surfaces in 4-space, Proceedings of 1st International Meeting on Geometry and Topology, Braga (Portugal), Public. Centro de Matemática da Universidade do Minho, pp. 175–183, 1998.

外的平坦曲面の向き付け可能性

本田 淳史*

都城工業高等専門学校

概要

O'Neill-Stiel の定理により, 3次元球面の完備な外的平坦曲面 (外的曲率が常に消える曲面) は全測地的なものに限ることが知られているが, ある種の特異点を許容すると非自明な例が数多く存在する. 本講演では, それらの大域的性質, とくに向き付け可能性を調べた結果を紹介する.

Hartman-Nirenberg の定理により 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 の完備な平坦曲面は柱面となり, 自明なものに限る ([1], [2]). ここで, ある種の特異点を許容した平坦曲面である平坦フロントを考える.

2次元可微分多様体 M^2 からの C^∞ -写像 $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が**平坦フロント**であるとは, 各点 $p \in M^2$ に対し, その近傍 $U_p \subset M^2$ と C^∞ -写像 $\nu: U_p \rightarrow S^2$ が存在して, $q \in U_p$ に対し

$$\langle df(T_q M^2), \nu(q) \rangle = 0, \quad L := (f, \nu): U_p \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2 = T_1 \mathbf{R}^3 \text{ がはめ込み}$$

かつ, $\text{rank}(d\nu_q) \leq 1$ となるときをいう. さらに, 平坦フロント $f: M^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ が**完備**であるとは, M^2 上のコンパクトな台を持つ 2 階の対称共変テンソル T が存在し, $ds^2 + T$ が M^2 上の完備な計量となるときをいう. このような完備平坦フロントは完備平坦曲面の一般化であり, 非自明な例が数多く存在する. Murata-Umehara [3] はそれらを調べ, 次の結果を得た.

事実 0.1 ([3]). 完備平坦フロントは, 特異点集合が空でないならば臍点を持たず, 向き付け可能であり余向き付け可能である. さらに, f の全てのエンドが埋め込みであるならば, f のカスプ辺でない特異点は少なくとも 4 つ存在する.

* atsumi@cc.miyakonojo-nct.ac.jp

ここで、フロントが**向き付け可能**であるとは M^2 が向き付け可能であるときをいい、**余向き付け可能**であるとは単位法線ベクトル場 ν が M^2 上大域的に定義されることをさす。また、事実 0.1 の特異点の個数の評価は最良である (図 1 参照)。

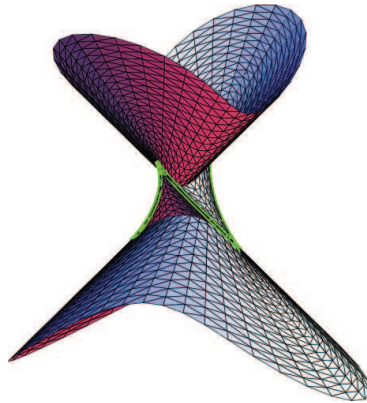


図 1 カस्प辺でない特異点を 4 つ持つ \mathbf{R}^3 の完備外的平坦フロント.

ここで、平坦曲面の一般の空間型への自然な一般化である外的平坦曲面 (主曲率の積 (外的曲率) が常に消える曲面) を考える。3 次元球面 S^3 の外的平坦曲面は、O'Neill-Stiel[4] の定理により完備ならば全測地的となることが知られている。しかし、外的平坦フロントを考えると、完備、より強く閉である非自明なものが数多く存在する。

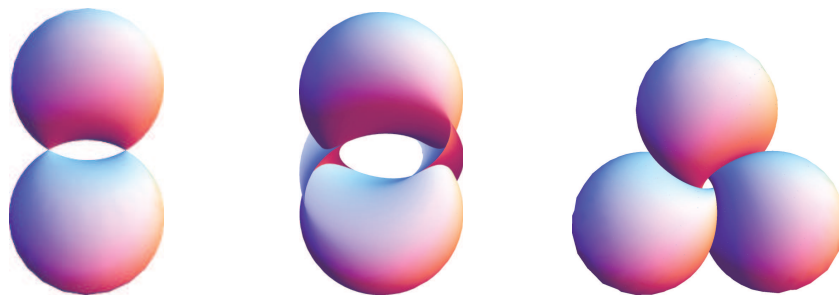


図 2 S^3 の外的平坦閉フロント.

本講演では、そのような S^3 の外的平坦フロントの大域的性質を研究した結果を紹介する。主結果は以下の通りである。

主定理. 全測地的でない S^3 の弱完備な外的平坦フロントは、臍点を持たない。さらに、それらが余向き付け可能ならば向き付け可能である。

ここで、外的平坦フロント $f: M^2 \rightarrow S^3$ が弱完備であるとは、 $L = (f, \nu): M^2 \rightarrow T_1S^3$ による佐々木リフト計量の M^2 への引き戻しが完備となるときをいう。定義より、フロントが完備ならば弱完備となる。

\mathbf{R}^3 の場合、事実 0.1 により完備平坦フロントは余向き付け可能であったが、 S^3 の場合は余向き付け不可能な外的平坦閉フロントが存在する (図 2 右参照)。

主定理の証明には、Murata-Umehara [3] による手法と、Shiohama-Takagi [5] によるひとつの主曲率が一定である完備な曲面の分類の手法を用いる。フロントが

$$\text{rank}(d\nu + c df) \leq 1$$

を満たすとき、ひとつの主曲率が一定値 c であるという。定義より、 $c \neq 0$ のとき、それらは余向き付け可能であることがわかるが、向き付け可能であるかどうかはわからない。実際、ひとつの主曲率が一定である向き付け不可能なフロントが存在する (図 3 参照)。

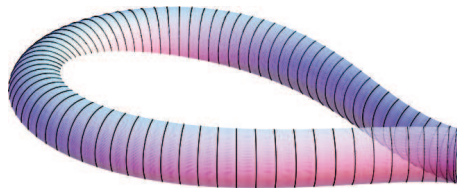


図 3 ひとつの主曲率が一定である向き付け不可能なフロント。

しかし、弱完備な場合にはそれらは向き付け可能であることを示すことができ、その極限をとることで主定理を導くことができる。

参考文献

- [1] P. HARTMAN AND L. NIRENBERG, On spherical image maps whose Jacobians do not change sign, *Amer. J. Math.* **81** (1959), 901–920.
- [2] W. S. MASSEY, Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean 3-space, *Tohoku Math. J.* **14** (1962), 73–79.
- [3] S. MURATA AND M. UMEHARA, Flat surfaces with singularities in Euclidean 3-space, *J. Differential Geom.* **82** (2009), 279–316.
- [4] B. O’NEILL AND E. STIEL, Isometric immersions of constant curvature manifolds, *Michigan. Math. J.* **10** (1963), 335–339.
- [5] K. SHIOHAMA, AND R. TAKAGI, A characterization of a standard torus in E^3 , *J. Differential Geom.* **4** (1970), 477–485.

Deformations of associative submanifolds in nearly parallel G_2 -manifolds

河井 公大朗（東北大学理学研究科）*

1 序

枠束の構造群が例外型 Lie 群 G_2 に縮小されるような 7 次元リーマン多様体 Y は G_2 多様体と呼ばれる。その特別なクラスとして、錐のホロノミー群が $\text{Spin}(7)$ に含まれるような nearly parallel G_2 多様体がある。associative 部分多様体は、 Y の 3 次元極小部分多様体であり、 Y の G_2 構造と密接に関係している。(定義 2.3).

nearly parallel G_2 多様体、associative 部分多様体には多くの例が知られている。実際、 $\text{SU}(4) \subset \text{Spin}(7)$ であるから、7 次元佐々木・アインシュタイン多様体は nearly parallel G_2 多様体である。 $(S^7, \text{SO}(5)/\text{SO}(3), \text{SU}(3)/\text{U}(1)$ 等) 更に、上記佐々木多様体の特殊ラグランジュ部分多様体（その錐が特殊ラグランジュ部分多様体になる）は associative となる。

一方で、佐々木・アインシュタイン多様体の特殊ラグランジュ部分多様体の無限小変形は、大仁田義裕氏により研究がなされた ([5])。無限小変形の空間をラプラシアン固有空間として特徴づけ、 $S^7, \text{SO}(5)/\text{SO}(3)$ の等質特殊ラグランジュ部分多様体の変形空間を幾何学的に説明した。特殊ラグランジュ部分多様体は associative であるから、次の自然な問が考えられる。

問 1.1. 特殊ラグランジュ部分多様体としてだけでなく、associative submanifold としても変形した場合、変形の空間はどのようになるか？

今回は、この問いに対する回答を与える。更に、 S^7 内の等質な associative 部分多様体に対して、変形の空間を具体的に考察する。

2 G_2 幾何学

まず次を満たす \mathbb{R}^7 上の 3-form φ_0 、 \mathbb{R}^8 上の 4-form Φ_0 が取れることに注意する。

$$G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}); g^* \varphi_0 = \varphi_0\}, \quad \text{Spin}(7) = \{g \in GL(8, \mathbb{R}); g^* \Phi_0 = \Phi_0\},$$

*本研究は科研費 (課題番号:24-3603) の助成を受けたものである。

これら form はそれぞれ、 \mathbb{R}^7 , \mathbb{R}^8 上の計量、体積要素を誘導する。 Φ_0 は自己双対であり、分解 $\mathbb{R}^8 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$ のもとで

$$\Phi_0 = dx_0 \wedge \varphi_0 + *\varphi_0$$

を満たす。 x_0 は \mathbb{R}^7 の座標である。また $\mathbb{R}^8 \cong \mathbb{C}^4$ と同一視したとき、 Φ_0 は

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_0 + \text{Re}\Omega_0$$

とかける。 ω_0, Ω_0 はそれぞれ、 \mathbb{C}^4 上の標準的なケーラー形式、正則体積要素。

定義 2.1. (Y, g) を向きづけられた7次元リーマン多様体とし、 φ を Y 上の 3-form とする。 (Y, φ, g) が G_2 多様体であるとは、各 $y \in Y$ に対して、向きを保つ同型 $T_y Y \cong \mathbb{R}^7$ が存在して、それにより φ_y と φ_0 が同一視され、 g が φ から誘導される計量であるときをいう。これは枠束の構造群が G_2 に縮小されることと同値。 $d\varphi = d*\varphi = 0$ のとき **torsion-free**、 $d\varphi = 4*\varphi$ のとき **nearly parallel** と呼ぶ。

(X, h) を向きづけられた8次元リーマン多様体とし、 Φ を Y 上の 4-form とする。枠束の構造群が $\text{Spin}(7)$ に縮小されるとき、それを $\text{Spin}(7)$ 多様体といい、上同様 Φ を用いて定義できる。 $d\Phi = 0$ のとき、**torsion-free** と呼ばれる。

注意 2.2. (Y^7, φ, g) : torsion-free と $\text{Hol}(g) \subset G_2$ は同値。 (X^8, Φ, h) : torsion-free と $\text{Hol}(g) \subset \text{Spin}(7)$ は同値。 (Y^7, φ, g) : nearly parallel と、 $(C(Y), \Phi, \bar{g}) := (Y \times \mathbb{R}_{>0}, r^3 dr \wedge \varphi + r^4 *\varphi, dr^2 + r^2 g)$: torsion-free $\text{Spin}(7)$ 多様体は同値。

次に部分多様体に関する知識をまとめる。

定義 2.3. [1] (Y, φ, g) を G_2 多様体、 $M^3 \subset Y$ を向きづけられた3次元部分多様体とすると、 $\varphi|_{TM} \leq \text{vol}_M$ となる。等号が成立するとき、 M を **associative 部分多様体** という。

(X, Φ, h) を $\text{Spin}(7)$ 多様体、 $N^4 \subset X$ を向きづけられた4次元部分多様体とすると、 $\varphi|_{TN} \leq \text{vol}_N$ となる。等号が成立するとき、 N を **Cayley 部分多様体** という。

補題 2.4. (Y, φ, g) を *nearly parallel* G_2 -多様体、 $M^3 \subset Y$ を向きづけられた3次元部分多様体とすると、 $M \subset Y : \text{associative} \Leftrightarrow C(M) \subset C(Y) : \text{Cayley}$.

3 佐々木多様体の幾何学

定義 3.1. 奇数次元のリーマン多様体 (S, g) が、**佐々木多様体** であるとは、その錐 $(C(S), \bar{g}) = (S \times \mathbb{R}_{>0}, dr^2 + r^2 g)$ が、ある $C(S)$ 上の複素構造 J に関してケーラー多様体になるときをいう。

以下 (S, g) を 7次元コンパクト単連結佐々木アインシュタイン多様体 とする。このとき、 $C(S)$ はカラビ・ヤウ多様体になることが知られている。

補題 3.2. ある 3-form $\varphi \in \Omega^3(S)$ が存在して (S, φ, g) は *nearly parallel G_2 多様体*.

Proof. $C(S)$ 上のケーラー形式を ω 、正則体積要素を Ω とかくと、

$$\frac{1}{2}\omega^2 + \operatorname{Re}\Omega = r^3 dr \wedge \varphi + r^4 * \varphi$$

によって $\varphi \in \Omega^3(S)$ を定めればよい。 □

次に部分多様体に関する知識をまとめる。 $L \subset S$ を 3次元部分多様体とする。

定義 3.3. L がルジャンドルとは、 $\omega|_{TC(L)} = 0$ のとき、 L が特殊ルジャンドルとは、 $\omega|_{TC(L)} = 0, \operatorname{Im}\Omega|_{TC(L)} = 0$ のときをいう。

定義より次がわかる。

補題 3.4. L が特殊ルジャンドル、あるいは $C(L)$ が $C(S)$ の複素部分多様体とすると、 L は *associative* となる。

3.1 特殊ルジャンドル部分多様体の無限小変形

$L \subset S$ を特殊ルジャンドル部分多様体とする。

補題 3.5. [5] 特殊ルジャンドル部分多様体としての、 L の無限小変形の空間は

$$\{f \in C^\infty(L); \Delta_+ f = 8f\}. \quad (3.1)$$

と同一視される。ここで Δ_+ は L 上の正のラプラシアン。

証明の概略. ν を L の S における法束とする。 L はルジャンドルより、自然な同型 $\nu \ni v \mapsto (g(v, J(r \frac{\partial}{\partial r})|_{r=1}), -g(Jv, \cdot)) \in \mathbb{R} \oplus T^*L$ がある。 $V \in C^\infty(L, \nu)$ が $(f, \alpha) \in C^\infty(L) \oplus \Omega^1(L)$ に対応するとする。このとき

$$L_V \left(i \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \omega \right) \Big|_{TL} = -2\alpha + df, \quad L_V \left(i \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \operatorname{Im}\Omega \right) \Big|_{TL} = d * \alpha + 4f \operatorname{vol}_L$$

より主張を得る。 □

4 nearly parallel G_2 多様体における associative 部分多様体の変形

(Y, φ, g) を nearly parallel G_2 -多様体とし、 $M^3 \subset Y$ を associative 部分多様体とする。 ν を M の Y における法束とし、 ∇^\perp を (Y, g) のレビ・チビタ接続から誘導され

る ν の接続とする。 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を TM の局所枠とし、微分作用素 $D : C^\infty(M, \nu) \rightarrow C^\infty(M, \nu)$ を次で定義する。

$$D\psi := \sum_{i=1}^3 e_i \times \nabla_{e_i}^\perp \psi.$$

注意 4.1. [4] ある階数 4 のベクトル束 $E \rightarrow M$ が存在して、 $\nu \cong \mathbb{S} \otimes_{\mathbb{H}} E$ となる。ここで $\mathbb{S} \rightarrow M$ はスピノール束。このとき D は twisted Dirac 作用素になる。

命題 4.2. *associative* 部分多様体としての、 M の無限小変形の空間は

$$\{\psi \in C^\infty(M, \nu); D\psi = -\psi\}$$

と同一視される。

証明の概略. ある $\chi \in \Omega^3(M, TM)$ が存在して、 M が associative となるのは、 $\chi|_{TM} = 0$ と同値であることが知られている。 $F : C^\infty(M, \nu) \rightarrow C^\infty(M, TY|_M)$ を $F(\sigma) = \exp_\sigma^* \chi(e_1, e_2, e_3)$ と定めると、 $\exp_\sigma(M)$ が associative となるのは、 $F(\sigma) = 0$ と同値である。よって $\psi \in C^\infty(M, \nu)$ に対して

$$(dF)_0(\psi) = 0$$

を考えればよい。直接計算と、 Y が nearly parallel より主張が従う。 \square

5 佐々木・アインシュタイン多様体の特殊ラグランジュ部分多様体の、 associative 部分多様体としての変形

(S, g) をコンパクト単連結佐々木・アインシュタイン 7 次元多様体とする。 $L \subset S$ を特殊ルジャンドルとし、 ν を L の S における法束とする。

命題 5.1. 同一視 $\nu \cong TL \oplus \mathbb{R}$ のもとで、 D は $\mathfrak{X}(L) \oplus C^\infty(L) \rightarrow \mathfrak{X}(L) \oplus C^\infty(L)$

$$(v, f) \mapsto (-\text{grad}(f) + \text{rot}(v) + v, \text{div}(v) + 3f)$$

とかける。ここで $\text{rot}(v) = \sum_{i=1}^3 e_i \times \nabla_{e_i}^\top v$ である。 \times は $g_L(v \times w, \cdot) = \varphi(v, w, \cdot) = \text{vol}_L(v, w, \cdot)$ ($v, w \in TL$) により定義される。

ベクトル解析同様次が成立。

補題 5.2. $f \in C^\infty(L)$, $v \in \mathfrak{X}(L)$ に対して、 $\text{rot}(\text{grad}(f)) = 0$, $\text{div}(\text{rot}(v)) = 0$.

ここで $D(v, f) = -(v, f)$ とすると、上の補題により次を得る。

定理 5.3. [2] 特殊ルジャンドル部分多様体 $L \subset S$ の、 *associative* 部分多様体としての無限小変形の空間の次元は、

$$\dim\{f \in C^\infty(L); \Delta_+ f = 8f\} + \dim\{v \in \mathfrak{X}(L); \text{rot}(v) = -2v\},$$

とかける。ゆえに補題 3.5 より、特殊ルジャンドル変形と *associative* 変形の間次元の差は、 $\dim\{v \in \mathfrak{X}(L); \text{rot}(v) = -2v\}$ で与えられる。

6 S^7 の等質 associative 部分多様体の変形

S^7 の等質 associative 部分多様体は Lotay により分類されている。

命題 6.1. [3] S^7 の全測地的でなく、かつ全測地的な S^6 に含まれない連結等質 associative 部分多様体は、 $\text{Spin}(7)$ 作用で移りあうものを除き、

$$A_1 \cong T^3, A_2 \cong \text{SU}(2)/\mathbb{Z}_3, A_3 \cong \text{SU}(2)$$

のいずれかとなる。 A_1 は [1] で構成された特殊ルジャンドル部分多様体、 A_2 は $\mathbb{C}P^3$ の正則曲線の Hopf リフト、 A_3 は他の幾何には現れない associative 部分多様体。

定理 6.2. [2] 無限小変形の空間、 $\text{Spin}(7)$ 作用からくる変形の次元は次の通り。

	$\dim_{\mathbb{R}}\{\psi; D\psi = -\psi\}$	$\text{Spin}(7)$ 作用から来る次元
全測地的 S^3	12	12
A_1	18	18(= $\dim \text{Spin}(7)/T^3$)
A_2	30	17(= $\dim \text{Spin}(7)/\text{U}(2)$)
A_3	34	18(= $\dim \text{Spin}(7)/\text{SU}(2)$)

ゆえに、全測地的 S^3 、 A_1 は rigid。 A_2, A_3 は rigid でない。 A_2 の非自明な変形は、 $\text{PGL}(4, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}P^3$ への作用から、Hopf リフトにより誘導される変形である。

証明には、Peter Weyl の定理を用いる。これはトーラス上のフーリエ変換を一般のコンパクト Lie 群上に拡張したものである。この手法は [5] で用いられたもので、この手法により固有空間の基底も具体的に記述できる。

参考文献

- [1] R. Harvey and H. B. Lawson, Calibrated geometries, Acta Math. 148 (1982), 47-157.
- [2] K. Kawai, Deformations of associative submanifolds in nearly parallel G_2 -manifolds, in preparation.
- [3] J. D. Lotay, Associative Submanifolds of the 7-Sphere, Proc. Lond. Math. Soc. (3), 105, (2012), 1183-1214.
- [4] R. C. McLean, Deformations of Calibrated Submanifolds, Comm. Anal. Geom. 6, (1998), 705-747.
- [5] Y. Ohnita, On deformation of 3-dimensional certain minimal Legendrian submanifolds, Proceedings of The Thirteenth International Workshop on Diff. Geom. 13, (2009), 71-87.

Gromov の Wirtinger space と 非線形スペクトルギャップ

近藤 剛史

東北大学大学院理学研究科

概要

Margulis の超剛性定理の幾何学的理解とその一般化を示すために、非正曲率空間をターゲットとした非線形スペクトルギャップの評価が必要となると考えられる (c.f. [10]). 本稿では CAT(0) 空間の概念の一般化として Gromov が [5] において定式化している $\text{Cycl}_k(0)$ 空間, Wirtinger 空間の紹介をし, これらの空間の基本的な性質についての考察を行った後, 幾つかのグラフでは Wirtinger 空間をターゲットとした非線形スペクトルギャップのシャープな評価が可能であることを紹介する. この結果は豊田哲氏 (鈴鹿高専) との共同研究に基づく.

1 $\text{Cycl}_k(0)$ 空間と Wirtinger 空間

Gromov は [5] で $\text{Cycl}_k(0)$ 空間, Wirtinger 空間の概念を導入し, これらの空間をターゲットとする非線形スペクトルギャップや測度集中不等式について考察している. まず, これらの概念の定義を与える.

定義 1.1. 距離空間 (X, d) が $\text{Cycl}_k(0)$ 空間 ($k \geq 4$) であるとは, 任意の k 点 $x_i \in X$ ($i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$) に対して, ユークリッド平面内の比較点 $x'_i \in \mathbb{R}^2$ ($i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$) が存在して, 任意の i に対して

$$\|x'_i - x'_{i+1}\| \leq d(x_i, x_{i+1}),$$

かつ任意の i と $j \neq i \pm 1$ に対して

$$\|x'_i - x'_j\| \geq d(x_i, x_j)$$

を満たすことをいう.

定義 1.2. X を距離空間とし, 整数 $k \geq 4$ を固定する. サイクルグラフ C_k の頂点集合とアーベル群 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ を同一視し, 写像 $f: C_k \rightarrow X$ と $1 \leq j \leq k-1$ に対して

$$W_j(f) = \sum_{i \in C_k} d(f(i), f(i+j))^2$$

とする. また, C_k から \mathbb{R}^2 の単位円上の正 k 角形への標準的な埋め込み ι に対して $W_j(k) = W_j(\iota) (= 4k \sin^2 \frac{j\pi}{k})$ とおく. 距離空間 X が Wirtinger の不等式 Wir_k を満たすとは, 任意の写像 $f: C_k \rightarrow X$ と任意の $2 \leq j \leq k-2$ に対して

$$\frac{W_1(f)}{W_j(f)} \geq \frac{W_1(k)}{W_j(k)} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{k}}{\sin^2 \frac{j\pi}{k}}$$

が成り立つこととする. この時に X は Wir_k 空間であるということもある. また任意の k に対して Wir_k を満たす空間を単に Wirtinger 空間という.

Gromov は $\text{CAT}(0)$ 空間が Wir_k 不等式を満たすことを, Reshetnyak の定理を用いてユークリッド空間の議論に帰着してから有限アーベル群のフーリエ解析を用いるというアイデアで証明しており, 任意の $k \geq 4$ に対して $\text{CAT}(0) \Rightarrow \text{Cycl}_k(0) \Rightarrow \text{Wir}_k$ を示していることになる. $\text{CAT}(0)$ 空間については [2] が詳しい.

Wir_4 は Enflo による roundness 2 不等式とも同値であり, $\text{CAT}(0)$ 空間でこの不等式が成り立つことは様々な人が指摘していたが, 逆に測地空間が short diagonal 不等式を満たすと $\text{CAT}(0)$ 空間になることが Berg, Nikolaev [1] によって示されている. また, この定理の簡単な別証明が Sato [11] によって与えられている.

Gromov は [5] で $\text{Cycl}_4(0)$ 空間において $\text{Wir}_k (k \geq 5)$ 不等式が成り立つかという問題を提示している.

本稿では, まずこの間に部分的な解を得ることができたことを紹介する.

定理 1.3. X を $\text{Cycl}_4(0)$ 空間とすると, $4 \leq k \leq 9$ に対して, Wirtinger の不等式 Wir_k が成り立つ.

また, $\text{CAT}(0)$ 空間以外の $\text{Cycl}_4(0)$ 空間について以下のような例がある.

命題 1.4. 任意の距離空間 (X, d) に対して, $(X, d^{1/2})$ は $\text{Cycl}_4(0)$ 空間である.

特に, 定理 1.3 より, この空間は $\text{Wir}_k (4 \leq k \leq 9)$ を満たす.

命題 1.5. 超距離空間 (X, d) は任意の k に対して $\text{Cycl}_k(0)$ 空間である.

命題 1.6. Wir_4 を満たすが, Wir_5 を満たさない空間が存在する. 特に, 定理 1.3 より, $\text{Wir}_4 \Rightarrow \text{Cycl}_4(0)$ は成立しない.

2 スペクトルギャップ

非線形のスペクトルギャップを定義する前に, まずは線形の (通常の) スペクトルギャップを定義する.

重み付きグラフとは, 有限連結グラフ $G = (V, E)$ と重み関数 $m: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ の組 (G, m) であって, $m(u, v) = m(v, u)$, $m(u, v) > 0 \Leftrightarrow \{u, v\} \in E$ が成り立つもののこととする.

このとき, 任意の頂点 $u \in V$ に対して $m(u) = \sum_{v \in V} m(u, v)$ として頂点の重みを定義する. また, 便宜上 $m(\emptyset) = \sum_{v \in V} m(v)$ と定めておく.

重み付きグラフに対して, その上の関数 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ に作用する組合せラプラシアンを

$$\Delta f(u) := f(u) - \sum_{v \in V} \frac{m(u, v)}{m(u)} f(v)$$

で定義すると, 組合せラプラシアンの固有値の集合は必ず 0 を含み, 区間 $[0, 2]$ に入ることが知られている. 組合せラプラシアンの 0 でない最小の固有値を $\mu_1(G) = \mu_1(G, m)$ と書き, これを重み付きグラフのスペクトルギャップという. $\mu_1(G)$ は次のようにも特徴付けられることが知られている:

$$\mu_1(G) = \inf_{\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}} \frac{\sum_{\{u, v\} \in E} m(u, v) |\varphi(u) - \varphi(v)|^2}{\frac{1}{2m(\emptyset)} \sum_{u, v \in V} m(u) m(v) |\varphi(u) - \varphi(v)|^2}.$$

ここで, φ は G 上の非定値関数全体を動く.

この表示において \mathbb{R} を一般の距離空間にしたものを非線形スペクトルギャップといい, Gromov が [4], [5] で考察している.

定義 2.1 (非線形スペクトルギャップ). 重み付きグラフ (G, m) と距離空間 (X, d) に対して

$$\lambda_1^{\text{Gro}}(G, X) = \inf_{\varphi: V \rightarrow X} \frac{\sum_{\{u, v\} \in E} m(u, v) d(\varphi(u), \varphi(v))^2}{\frac{1}{2m(\emptyset)} \sum_{u, v \in V} m(u) m(v) d(\varphi(u), \varphi(v))^2}$$

を非線形スペクトルギャップという. ただし, φ は V から X への非定値写像全体を動く.

また $\lambda_1^{\text{Gro}}(G, X)$ は Poincaré タイプの不等式

$$\frac{1}{2m(\emptyset)} \sum_{u, v \in V} m(u) m(v) d(\varphi(u), \varphi(v))^2 \leq \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{\{u, v\} \in E} m(u, v) d(\varphi(u), \varphi(v))^2$$

が任意の写像 $\varphi: V \rightarrow X$ について成立するような λ の上限とすることもできる.

定義から $\mu_1(G) = \lambda_1^{\text{Gro}}(G, \mathbb{R})$ であるが, ヒルベルト空間 \mathcal{H} に対しても $\mu_1(G) = \lambda_1^{\text{Gro}}(G, \mathcal{H})$ が成り立っていることが容易に分かる. $\lambda_1^{\text{Gro}}(G, X)$ はヒルベルト空間とは限らない距離空間をターゲットとする $\mu_1(G)$ の一般化と考えられるため, 非線形スペクトルギャップと呼ばれている.

ここでは定義は述べないが CAT(0) 空間 X に対する Wang の不変量 $\lambda_1(G, X)$ (c.f. [14], [8]) も一種の非線形のスペクトルギャップとすることができ, 一般の CAT(0) 空間では $\lambda_1^{\text{Gro}}(G, X) \leq \lambda_1(G, X) \leq \mu_1(G)$ しか成り立たず, 両者は異なるために Gromov の定義したものには λ_1^{Gro} の記号を用いている.

与えられた重み付きグラフ (G, m) と CAT(0) 空間 X に対して $\lambda_1^{\text{Gro}}(G, X)$ や $\lambda_1(G, X)$ を下から評価する問題は, 井関氏, 納谷氏の定理 [8] により群の固定点性質と関係するため, 既に多くの研究がある.

従来は CAT(0) 空間 X を固定した時に, 比 $\lambda_1(G, X)/\mu_1(G)$ を下から評価するという研究 ([3], [6], [7], [8], [12], [13]) がほとんどで, 一般の X ではこの比の G を動かした時の下限は 0 となることが分かっている ([9]).

ここでは, ある種のグラフを固定した時には, 任意の CAT(0) 空間, あるいはもっと一般に任意の Wirtinger 空間をターゲットとする $\lambda_1^{\text{Gro}}(G, X)$ が $\mu_1(G)$ で下から評価でき, また逆に非線形スペクトルギャップの性質を用いて様々な空間を特徴付けることもできることについて述べる.

定理 2.2. H_n を n 次元のハミングキューブに一様な重みを入れたものとする. 距離空間 X に対して以下は同値である.

1. X は Wir_4 を満たす.
2. ある整数 $n \geq 2$ に対して $\lambda_1^{\text{Gro}}(H_n, X) = 2/n$ が成り立つ.
3. 全ての整数 $n \geq 2$ に対して $\lambda_1^{\text{Gro}}(H_n, X) = 2/n$ が成り立つ.

特に任意の CAT(0) 空間 X に対して $\lambda_1^{\text{Gro}}(H_n, X) = \lambda_1(H_n, X) = \mu_1(H_n) = 2/n$ が成り立つ.

定理 2.3. 距離空間 X に対して以下は同値である.

1. X は $\text{Cycl}_4(0)$ 空間である.
2. 任意の 4 点 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ と二つの実数 $t, s \in [0, 1]$ に対して

$$(1-t)(1-s)d(x_1, x_2)^2 + t(1-s)d(x_2, x_3)^2 + tsd(x_3, x_4)^2 + (1-t)sd(x_4, x_1)^2 \\ \geq t(1-t)d(x_1, x_3)^2 + s(1-s)d(x_2, x_4)^2$$

が成り立つ.

3. $m(1, 2)m(3, 4) = m(2, 3)m(4, 1)$ を満たす任意の重み付きの四角形 (C_4, m) に対して

$$\lambda_1^{\text{Gro}}((C_4, m), X) \geq 1$$

が成立する.

ここで, 四角形 C_4 の頂点と $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ とを同一視した. 特に任意の CAT(0) 空間 X に対して $\lambda_1^{\text{Gro}}((C_4, m), X) = \lambda_1((C_4, m), X) = \mu_1(C_4, m) = 1$ が成り立つ.

命題 2.4. G を次のいずれかのグラフとすると, 任意の Wirtinger 空間 X に対して $\lambda_1^{\text{Gro}}(G, X) = \lambda_1(G, X) = \mu_1(G)$ が成り立つ. 完全グラフ K_n , n -サイクル C_n , ハミンググラフ $H(k, n)$, 完全 n 部グラフ $K_{2,2,\dots,2}$, A_3 型コクセター複体の 1 スケルトン.

一方, G を $n \geq 3$ に対する完全二部グラフ $K_{n,n}$ や generalized polygon とすると不等式 $\lambda_1^{\text{Gro}}(G, X) < \mu_1(G)$ が成り立っている.

最後に, これらの結果から自然に生まれる次の問題を述べておく.

問題 1. X を $\text{Cycl}_4(0)$ 空間あるいは, Wirtinger 空間とする. このとき $\lambda_1^{\text{Gro}}(G, X) = \mu_1(G)$ が成立するような重み付きグラフ G 全体の集合を特徴付けよ.

参考文献

- [1] I.D. Berg, I.G. Nikolaev. Quasilinearization and curvature of Aleksandrov spaces. *Geom. Dedicata* 133 (2008), 195-218.
- [2] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [3] K. Fujiwara and T. Toyoda. Random groups have fixed points on CAT(0) cube complexes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(2012), 1023–1031, 2012.
- [4] M. Gromov. Random walk in random groups. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1):73–146, 2003.
- [5] M. Gromov. CAT(κ)-spaces: construction and concentration. *J. Math. Sci. (N. Y.)* 119(2), 178–200, 2004.
- [6] H. Izeki, T. Kondo, S. Nayatani, Fixed-point property of random groups, *Ann. Global Anal. Geom.* 35 (2009), no. 4, 363–379.
- [7] H. Izeki, T. Kondo, and S. Nayatani. N -step energy of maps and fixed-point property of random groups. *Groups Geom. Dyn.*, 6 (2012), no. 4, 701–736.
- [8] H. Izeki, S. Nayatani, Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces, *Geometriae Dedicata* 114 (2005), 147–188.
- [9] T. Kondo. CAT(0) spaces and expanders. *Math. Z.* 271 (2012), no. 1-2, 343-355.
- [10] P. Pansu, Superrigidité géométrique et applications harmoniques. Séminaires et congrès 18, 375–422, Soc. Math. France, Paris, 2008.
- [11] T. Sato. An alternative proof of Berg and Nikolaev’s characterization of CAT(0)-spaces via quadrilateral inequality. *Arch. Math. (Basel)* 93 (2009), no. 5, 487-490.
- [12] T. Toyoda, CAT(0) spaces on which a certain type of singularity is bounded. *Kodai Math. J.* 33 (2010), no. 3, 398-415.
- [13] T. Toyoda. Fixed point property for a geodesically complete cocompact CAT(0) space. preprint, 2010.
- [14] M-T. Wang, Generalized harmonic maps and representations of discrete groups. *Comm. Anal. Geom.* 8 (2000), no. 3, 545–563.

一般化された連結和の崩壊と Hodge-Laplacian の固有値の収束

高橋淳也

(東北大学情報科学研究科)

本講演は、Colette Anné 氏 (フランス, ナント大学) との共同研究 ([AT12], [AT13]) に基づく.

1 序章

スペクトル幾何学における基本的な問題は, Riemann 多様体上の Laplacian や Dirac 作用素などのスペクトル (固有値) に反映される幾何学的情報を解明することである. 特に, 微分形式に作用する Laplacian (Hodge-Laplacian) $\Delta = d\delta + \delta d$ の場合は, 調和積分論により, スペクトルにコホモロジーの情報が反映されることが大きな特徴である. 我々は, スペクトルに反映される幾何学的情報を知るために, 多様体を崩壊や退化させたときのスペクトルの振る舞いから, 元の多様体の幾何との関係を調べる.

Riemann 多様体の崩壊の研究では, 断面曲率や Ricci 曲率が下から一様に抑えた下で研究するのが一般的だが, Hodge-Laplacian の場合にはそのような一般的な枠組みで議論するには, 幾何的にも解析的にも非常に困難である. また, Hodge-Laplacian の場合には, トポロジーの変化を見るのが重要である. 従って, 一般的な枠組みの考察だけでなく, トポロジーの変化が見やすい状況を調べることも重要である.

以上 2 つの理由から, 我々は以下で記す様な, 2 つの境界付き多様体の境界での連結和 (一般化された連結和) を取り, その一方を潰す変形を考える (Figure 1). これは, 崩壊と退化が混在した状況である.

なお, この方面の関連した研究に [ACP09], [AC95], [Ma06], [Ro08] などがある.

2 問題の設定と主定理

M_1, M_2 を同じ境界 Σ を持つ $m = n + 1$ 次元のコンパクト向き付けられた多様体とする. その共通の境界 $\Sigma = \partial M_i$ の次元を $n \geq 2$ とし, その上に 1 つ Riemann 計量 h を固定する. 今, (Σ, h) 上の Euclidean cone を $\mathcal{C}(\Sigma)$ とする. すなわち, $\mathcal{C}(\Sigma) = [0, 1] \times \Sigma / \{0\} \times \Sigma$ であり, 頂点を除いた滑らかな部分では $dr^2 \oplus r^2h$ の形の計量が入っていると. ここに, r は区間 $(0, 1]$ の座標とする.

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary 58J50; Secondary 35P15, 53C23, 58J32.
This work was partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number 24740034.

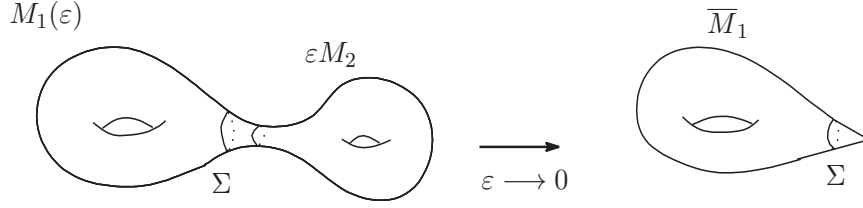


Figure 1: M_ϵ の崩壊

\bar{M}_1 を M_1 に cone $\mathcal{C}(\Sigma)$ を貼りつけて得られる cone 型特異点を持つコンパクト Riemann 多様体 $\bar{M}_1 = M_1 \cup_\Sigma \mathcal{C}(\Sigma)$ で, Riemann 計量 \bar{g}_1 は, cone $\mathcal{C}(\Sigma)$ の頂点を除いた所で $dr^2 + r^2 h$ となるような物とする.

次に, M_2 上の Riemann 計量 g_2 を, 境界の近傍 $[0, \frac{1}{2}] \times \Sigma$ において $ds^2 + (1-s)^2 h$ となるように取る. ここで, s は境界からの距離である.

任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\mathcal{C}_{\epsilon,1}(\Sigma) := \{(r, y) \in \mathcal{C}(\Sigma) \mid r > \epsilon\}$, $M_1(\epsilon) := M_1 \cup \mathcal{C}_{\epsilon,1}(\Sigma)$ とし, $(M_1(\epsilon), g_1)$ と $(M_2, \epsilon^2 g_2)$ を共通の境界 $(\Sigma, \epsilon^2 h)$ で貼り合わせた多様体を M_ϵ とする:

$$M_\epsilon := (M_1(\epsilon), g_1) \cup_\Sigma (M_2, \epsilon^2 g_2).$$

なお, 境界の近傍での計量の構成方法より, 全体の計量 g_ϵ は C^∞ 級である.

このとき, 我々は, 今貼り合わせて得られたコンパクト Riemann 多様体 $M_\epsilon = (M, g_\epsilon)$ (Figure 1) において, $\epsilon \rightarrow 0$ のとき, Hodge-Laplacian の固有値の極限を決定した.

Main Theorem A. 固有値の極限值が正であれば, その値は \bar{M}_1 上の

$$W \subset \bigoplus_{|\gamma| < \frac{1}{2}} \text{Ker}(A - \gamma)$$

に対応する Hodge-Laplacian $\Delta_{1,W}$ の正の固有値となる. ただし, A は境界 Σ 上のある 1 階の楕円型作用素である (詳細は 3 章).

閉拡張 $\Delta_{1,W}$ の構成方法は次章で述べるが, $M_1(\epsilon)$ 部分の極限での Hodge-Laplacian $\Delta_{1,\min}$ は一般に本質的自己共役ではない. すなわち, $D_{1,\min}$ の閉拡張が一意的ではない ([Ch80], [Ch83]). 従って, どのような閉拡張を選べば良いかが問題となるが, その選び方は我々の考えている多様体の族 M_ϵ の状況による. 特に, Σ のトポロジーにも依存する所が大変興味深い. 実際, その効果は極限での 0 固有値の存在にも大きく関わる.

Main Theorem B. 固有値の極限での 0 固有値の重複度は, 以下で与えられる:

$$\dim \text{Ker}(\Delta_{1,W}) + \dim \text{Ker}(D_2) + \dim \mathcal{I}_{\frac{1}{2}}.$$

ただし, \mathcal{D}_2 は M_2 上の Gauß-Bonnet 作用素 D_2 に Atiyah-Patodi-Singer 型の境界条件を課した作用素であり (詳細は 4 章), $\mathcal{I}_{\frac{1}{2}}$ は \bar{M}_2 上の L^2 ではない extended solutions ω で,

$r = 1$ に制限したとき, $\text{Ker}(A - \frac{1}{2})$ の成分からなるベクトル空間を表す (Carron [Ca01a]):

$$\mathcal{I}_{\frac{1}{2}} := \left\{ \omega(1) \in \text{Ker}(A - \frac{1}{2}) \mid \omega \text{ is an extended solution on } \widetilde{M}_2 \right\}.$$

さらに, 極限で cone $\mathcal{C}(\Sigma)$ の頂点にノルムが集中するような固有形式が存在することがある. この固有形式の極限は $\mathcal{I}_{\frac{1}{2}}$ の元に対応している. これは, 我々が初めて明らかにした全く新しい現象である.

3 \overline{M}_1 上の Hodge-Laplacian

本章と次章では, Main Theorem A, B の主張をより正確に述べるため, 登場する作用素の定義を中心に述べる.

$\varepsilon \rightarrow 0$ のとき, M_ε は, Gromov-Hausdorff の意味で, cone 型特異点を持つ多様体 \overline{M}_1 に収束する. しかし, 固有値の極限は \overline{M}_1 だけの情報では記述できない. 実際, 潰れてしまう部分 M_2 からの寄与がある.

まず, 非崩壊部分 \overline{M}_1 については, cone 型特異点付き多様体上の Gauß-Bonnet 作用素 $D_{1,\min}$ の “良い閉拡張” $D_{1,W}$ を選び, 極限はその固有値で与えられる. 問題は, この “良い閉拡張” の選び方である.

今, cone $\mathcal{C}(\Sigma)$ から頂点を除いた部分 $(0, 1] \times \Sigma$ 上の微分形式を, 直積計量を入れた場合への L^2 -等長変換を U とする. このとき, コンパクト台を持つ \overline{M}_1 上の Gauß-Bonnet 作用素 D_1 は

$$U \circ D_1 \circ U^{-1} = \partial_r + \frac{1}{r}A$$

と変数分離型の作用素として書ける. ただし, A は r に依らない (Σ, h) 上の 1 階の楕円型作用素である. 特に, A のスペクトル $\text{Spec}(A)$ は重複度が有限の固有値のみからなる.

$\text{Spec}(A) \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \emptyset$ のとき, D_1 の閉拡張は一意的 (すなわち, $D_{1,\min} = D_{1,\max}$) であるが, $\text{Spec}(A) \cap (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \neq \emptyset$ の場合には一意性が崩れる. しかし, その場合の閉拡張は, 以下の様にすべて分類できる (Bruning and Seeley [BS88], Lemma 3.2):

$$\mathcal{L} : \text{Dom}(D_{1,\max}) / \text{Dom}(D_{1,\min}) \xrightarrow{\sim} B := \bigoplus_{|\gamma| < \frac{1}{2}} \text{Ker}(A - \gamma).$$

なお, A は楕円型作用素なので, 右辺は有限次元ベクトル空間となり, $D_{1,\min}$ の閉拡張は有限個しかないことが分かる.

さて, 任意の部分空間 $W \subset B$ に対して, $D_{1,\min}$ の閉拡張作用素 $D_{1,W}$ の定義域が $\mathcal{L}^{-1}(W)$ となる作用素が一意的に取れる. このとき, Main Theorem A に現れる Hodge-Laplacian の自己共役拡張は $\Delta_{1,W} := D_{1,W}^* \circ D_{1,W}$ で与えられる. すなわち, $\varphi \in \text{Dom}(\Delta_{1,W})$ に対して, $(\Delta_{1,W} \varphi, \varphi)_{L^2(\overline{M}_1)} = \|D_{1,W} \varphi\|_{L^2(\overline{M}_1)}^2$ である. このとき, $\Delta_{1,W}$ のスペクトルは非負の固有値のみからなり, 対応する固有形式が $\text{Dom}(\Delta_{1,W})$ 内に取れ, 固有空間が有限次元である (Lesch [Le96]).

Remark 3.1. 通常の連結和の場合, すなわち, $\Sigma = S^n$ のとき, A の固有値は $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 内に現れない (我々の前の研究 [AT12] による). 従って, $D_{1,\min}$ の閉拡張は一意的であり, 空間 $\mathcal{I}_{\frac{1}{2}}$ も 0 である. さらに, 小さい固有値も現れない.

4 M_2 上の Gauß-Bonnet 作用素

次に、潰れてしまう部分 $(M_2, \varepsilon^2 g_2)$ の寄与を考える。そのため、スケールを拡大して、潰れる前の状況 (M_2, g_2) を見る。一般に Riemann 計量のスケール変換に対し、固有値には $\lambda_k(\varepsilon^2 g) = \varepsilon^{-2} \lambda_k(g)$ の関係がある。従って、潰れる部分からの寄与は 0 固有値、すなわち、調和形式のみを調べれば良い。

しかし、問題となるのは M_2 の境界条件である。我々の状況では、境界条件が Atiyah-Patodi-Singer [APS75] 型のスペクトル境界条件が必要となる。この条件は、 A の $\frac{1}{2}$ 以下へのスペクトル射影を $\Pi_{\leq \frac{1}{2}}$ と書けば、 $\Pi_{\leq \frac{1}{2}} \circ U = 0$ と書ける。

このとき、 (M_2, g_2) 上の Gauß-Bonnet 作用素 D_2 で、この境界条件を満たす作用素 (の閉拡張) を \mathcal{D}_2 と書くと、これは楕円型となる (Carron [Ca01a], [Ca01b])。特に、調和形式の空間 $\text{Ker}(\mathcal{D}_2)$ は有限次元であり、それが極限の 0 固有値における M_2 部分からの寄与である (Main Theorem B)。

我々は、この境界つき多様体 M_2 上の解析を行う代わりに、無限に伸びた cone $\mathcal{C}_{1,\infty}(\Sigma) = ([1, \infty) \times \Sigma, dr^2 + r^2 h)$ を境界に貼り付けた完備 Riemann 多様体 $\widetilde{M}_2 = M_2 \cup_{\Sigma} \mathcal{C}_{1,\infty}(\Sigma)$ 上で解析を行う。実際、 M_2 上の微分形式は、境界 Σ から無限 cone $\mathcal{C}_{1,\infty}(\Sigma)$ に調和拡張して \widetilde{M}_2 上で考えることが出来る (これらの手法は Carron [Ca01a], [Ca01b] による)。詳細は技術的に複雑なので、ここでは割愛する (直接、我々の論文 [AT13] を見て戴きたい)。

5 小さい固有値の存在例

最後に、 M_ε が正の小さい固有値 (すなわち、0 に収束する固有値) を持つ具体例を与える。

W_i ($i = 1, 2$) を 2 つの境界つきコンパクト Riemannian 多様体とし、その境界を $\Sigma_i = \partial W_i$ ($\dim \Sigma_i = n_i$) とする。また、 $n := n_1 + n_2 \geq 2$ とおく。このとき、

$$M_1 := W_1 \times \Sigma_2 \quad \text{and} \quad M_2 := \Sigma_1 \times W_2$$

として、2 章で見た様に M_ε を構成すると、

$$M_\varepsilon \cong (W_1 \times \Sigma_2) \cup_{\Sigma_1 \times \Sigma_2} (\Sigma_1 \times W_2)$$

となる。このとき、境界付き多様体 W_1, W_2 を色々取り替えることで、様々な崩壊の族 M_ε の具体例が得られる。

さて、この状況で小さい固有値の具体例を見よう。一番基本的な例は、 M_ε が m 次元球面 S^m の時である。この場合は、 $W_1 := D^{n_1+1}, W_2 := D^{n_2+1}$ ($n_2 \leq n_1$) と取ることで得られる。実際、 $\Sigma_2 = S^{n_2}$ であり、 $M = S^{n_1+n_2+1} \cong (D^{n_1+1} \times S^{n_2}) \cup_{\partial} (S^{n_1} \times D^{n_2+1})$ となる。このとき、極限に現れる 0 固有値を Main Theorem B に従って計算すると、0 固有値が増えていることが分かる。すなわち、球面 S^m 上に n_2 -form の小さい固有値の存在が分かる。

Proposition 5.1 (球面の小さい固有値). m 次元球面 S^m において、任意の次数 p とある Riemann 計量の族 g_ε が存在して、 $\lambda_1^{(p)}(S^m, g_\varepsilon) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) となる。

Remark 5.2. この球面の崩壊で、 $p = n_2 = 0$ の場合はいわゆる Cheeger のダンベルと呼ばれる物である。従って、この崩壊は p -form 版の Cheeger のダンベルを与えている。

他にも、球面の直積 $S^{n_1} \times S^{n_2+1}$ やその L 個の連結和 $\#_{i=1}^L (S^{n_1} \times S^{n_2+1})$ 上にも正の小さい固有値が存在する様な Riemann 計量の族が構成できる。

References

- [ACP09] C. Anné, G. Carron and O. Post, Gaps in the spectrum of Dirac type operators on non-compact manifolds, *Math. Zeit.* **262** no. 1 (2009), 57–90.
- [AC95] C. Anné et B. Colbois, Spectre du Laplacien agissant sur les p -formes différentielles et écrasement d’anses, *Math. Ann.* **303** no. 3 (1995), 545–573.
- [AT12] C. Anné and J. Takahashi, p -spectrum and collapsing of connected sums, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** no. 4 (2012), 1711–1735.
- [AT13] C. Anné and J. Takahashi, Partial collapsing and the spectrum of the Hodge-de Rham operator, preprint, (2013).
- [APS75] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **77** (1975), 43–69.
- [BS88] J. Brüning and R. Seeley, An index theorem for first order regular singular operators, *Amer. J. Math.* **110** (1988), no. 4, 659–714.
- [Ca01a] G. Carron, Un théorème de l’indice relatif, *Pacific J. Math.* **198** no. 1 (2001), 81–107.
- [Ca01b] G. Carron, Théorèmes de l’indice sur des variétés non-compactes, *J. reine angew. Math.* **541** (2001), 81–115.
- [Ch80] J. Cheeger, On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, *Proc. Symp. Pure. Math.* **36**, AMS Providence, RI, (1980), 91–145.
- [Ch83] J. Cheeger, Spectral geometry of singular Riemannian spaces, *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 575–657.
- [Le96] M. Lesch, Operators of Fuchs type, conical singularities, and asymptotic methods, *Teubner-Texte zur Mathematik 136*, Stuttgart (1997), arXiv:dg-ga/9607005.
- [Ma06] R. Mazzeo, Resolution blowups, spectral convergence and quasi-asymptotically conical spaces, *Actes Colloque EDP, Evian-les-Bains*, (2006).
- [Ro08] J. Rowlett, Spectral geometry and asymptotically conic convergence, *Comm. Anal. Geom.* **16** no. 4 (2008), 735–798.

東北大学大学院情報科学研究科数学教室
〒987-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3-09
e-mail: t-junya@math.is.tohoku.ac.jp

双曲空間における Coxeter 多面体について

野中 純¹ (慶應義塾大学理工学研究科)

凸多面体 Δ の面 S を含む超平面を $\langle S \rangle$ とする. 超平面 $\langle S \rangle$ に関する鏡映変換を g_S と表すことにする. また凸多面体の各面に対応する鏡映変換を生成元とする鏡映変換群を G とする. このとき, n 次元双曲空間 \mathbb{H}^n における凸多面体がタイル貼り可能とは, 次の条件を満たすことである.

$$\mathbb{H}^n = \bigcup_{g \in G} g\Delta. \quad (\text{ただし, } g \neq h \in G \text{ かつ } g\Delta \cap h\Delta \neq \emptyset \text{ ならば, } g\Delta \cap h\Delta \subset \partial(g\Delta))$$

凸多面体のタイル貼りに関する重要な定理として次が知られている.

定理 1. (Poincaré) 凸多面体 Δ がタイル貼り可能であることの必要十分条件は, Δ の任意の隣接面角が π の整数分割角なことである.

このような凸多面体, すなわち任意の隣接面角が π の整数分割角になるような凸多面体のことを Coxeter 多面体という.

双曲空間における Coxeter 多面体の存在・非存在については, 古くから研究されてきた. Vinberg によって, 30 次元以上の双曲空間には, コンパクトな Coxeter 多面体が存在しないことが示され ([1], [2]), また Prokhorov と Khovanskij によって 996 次元以上の双曲空間には有限体積な Coxeter 多面体が存在しないことが示された ([3], [4]). その一方で, Coxeter 多面体の具体例は, コンパクトなものについては 8 次元以下, 有限体積なものについては 21 次元以下でしか知られていない.

直角多面体とは, Coxeter 多面体の一種で, 全ての面角が $\frac{\pi}{2}$ となっているものをいう. 直角多面体については, Vinberg によって 5 次元以上の双曲空間にはコンパクトなものがないことが示され ([1]), また Potyagailo と Vinberg, そして Dufour によって 13 次元以上の双曲空間には有限体積なものも存在しないことが示された ([5], [6]).

n 次元双曲空間 \mathbb{H}^n において有限体積で非コンパクトな凸多面体を Δ とすると, Δ の閉包と \mathbb{H}^n の境界の共通部分 $\bar{\Delta} \cap \partial\mathbb{H}^n$ は有限個の点の集合となる. これらの点を **カスプ** という.

上述の Vinberg の結果から 5 次元以上の双曲空間において, 有限体積な直角多面体はカスプを少なくとも 1 つもつことがわかる. 本講演における主結果は, 6~12 次元の双曲空間における直角多面体が持つカスプ数の評価を与えている. この結果は, 次元が高くなるにつれてコンパクトに近い直角多面体が存在しにくくなることを示している.

定理 2. ([7]) \mathbb{H}^n における有限体積な直角多面体 Q^n が持つカスプの数を $c(Q^n)$ とする. このとき,

$$c(Q^6) \geq 3, \quad c(Q^7) \geq 17, \quad c(Q^8) \geq 36, \quad c(Q^9) \geq 91, \\ c(Q^{10}) \geq 254, \quad c(Q^{11}) \geq 741, \quad c(Q^{12}) \geq 2200$$

となる.

注. 双曲空間における有限体積な直角多面体の例は 8 次元以下でしか見つかっていない. すなわち, 9~12 次元においては, その存在・非存在がわかっていないのが現状である. 定理 2 は, その存在に対する制限を与えている.

¹email:jun_b_nonaka(at)yahoo.co.jp

定理 2 の証明方法は 6, 7 次元と 8 次元以上とは異なる. 6, 7 次元双曲空間の場合については, Nikulin の不等式を用いることが証明のポイントである. Nikulin の不等式を述べるための準備として, いくつかの用語の説明と, その表記を述べる.

n 次元空間の凸多面体 Δ の面を $(n-1)$ 次元面としたとき, その $(n-1)$ 次元面もまた凸多面体になる. その $(n-1)$ 次元面の面を Δ の $(n-2)$ 次元面と定めることで, 帰納的に凸多面体の k 次元面を定める. 以後, n 次元空間における凸多面体 Δ がもつ k 次元面の数を $a_k(\Delta)$ と表し, k 次元面の l 次元面数の平均を $a_k^l(\Delta)$ で表す:

$$a_k^l(\Delta) := \frac{1}{a_k(\Delta)} \sum_{F \in \{\Delta \text{ の } k \text{ 次元面}\}} a_l(F).$$

定理 3. (Nikulin の不等式, [8]) \mathbb{H}^n における有限体積な直角多面体を Q^n とする. このとき, $l < k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ に対して, 次が成り立つ.

$$a_k^l(Q^n) < \binom{n-l}{n-k} \frac{\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{l} + \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{l}}{\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{k} + \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{k}}.$$

Nikulin の不等式は, 前述の直角多面体の非存在に関する証明にも用いられている. Q^n をコンパクトな直角多面体とする. このとき, Q^n の任意の 2 次元面 F もまたコンパクトな直角多面体となる. \mathbb{H}^2 におけるコンパクトな直角多面体の外角の大きさの和は, 2π より大きいので, $\frac{\pi}{2}a_1(F) > 2\pi$ となる. よって $a_1(F) \geq 5$ である. このことから, $a_2^1(Q^n) \geq 5$ となる. このことと Nikulin の不等式より,

$$\begin{aligned} 5 \leq a_2^1(Q^n) &< \binom{n-1}{n-2} \frac{\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{1} + \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{1}}{\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} + \binom{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{2}} \\ &= \begin{cases} \frac{4(n-1)}{n-2} & n \text{ が偶数のとき,} \\ \frac{4n}{n-1} & n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

となる. したがって $n \leq 4$ である. すなわち, 4 次元以下の双曲空間にしかコンパクトな直角多面体は存在しないのである.

定理 2 の $n = 6$ の場合の証明の流れを述べる.

このときは, 3 次元面に着目することで示すことができる. \mathbb{H}^3 における有限体積な直角多面体の 2 次元面数とカスプ数について, 次の 2 つの補題が成り立つ.

補題 1. ([5]) \mathbb{H}^3 における有限体積な直角多面体 Q^3 の 2 次元面数 $a_2(Q^3)$ とカスプ数 $c(Q^3)$ について, 次の不等式が成り立つ.

$$a_2(Q^3) \geq 6, \quad a_2(Q^3) + 2c(Q^3) \geq 12.$$

補題 2. ([7]) \mathbb{H}^3 における有限体積な直角多面体 Q^3 がカスプをただ 1 つ持つとき, Q^3 の面数は 12 以上である. また Q^3 がカスプをただ 1 つ持ち, かつちょうど 12 個の面を持つとき, Q^3 の組み合わせ構造は一意に定まる (図を参照).

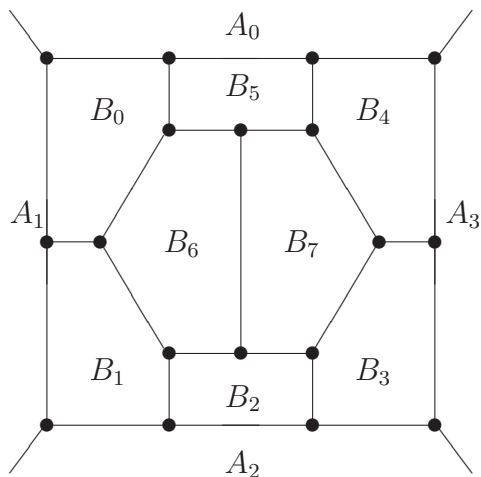


図 1: カスプを 1 個, 2次元面を 12 個もつ Q^3 の組み合わせ構造

注. 上図の $A_i (0 \leq i \leq 3)$ は非コンパクトな, $B_j (0 \leq j \leq 7)$ はコンパクトな 2次元面を表している.

注. 補題 2 において, カスプを 1 つと 2次元面を 12 個持つ Q^3 は, その組み合わせ構造が定まるため, Andreev の定理 ([9]) より, 3次元双曲空間に等長なものを除いて一意に存在する.

この 2 つの補題より, 次の系が得られる.

系. \mathbb{H}^3 における有限体積な直角多面体 Q^3 について, カスプ数が 1 以下のとき, 2次元面数は 12 以上である.

Q^6 の任意の 3次元面もまた有限体積な直角多面体になるので, この系が適用できる. したがって $c(Q^6) \leq 1$ のとき, Q^6 の任意の 3次元面 F について, $c(F) \leq 1$ となることから, $a_2(F) \geq 12$ となる. よって, このとき $a_3^2(Q^6) \geq 12$ となる. しかし, これは Nikulin の不等式から得られる $a_3^2(Q^6) < 12$ に矛盾する. よって, $c(Q^6) \geq 2$ である.

$c(Q^6) = 2$ と仮定する. このとき, 上の 2 つの補題に加え, 次の補題を用いることで $a_3^2(Q^6) \geq 12$ となることがわかる.

補題 3. カスプを 1 つしかもたない 3 つの 3次元面が互いに隣接し合い, かつカスプを共有するとき, その 3次元面のうち, 少なくとも 1 つは 13 個以上の 2次元面をもつ.

よってこのときも Nikulin の不等式から得られる $a_3^2(Q^6) < 12$ に矛盾する. 以上より $c(Q^6) \geq 3$ となる.

注. 定理 2 の $n = 7$ の場合については, Nikulin の不等式から得られる $a_3^2(Q^7) < 9$ を用いることで証明できる.

また, 定理 2 の 8 次元以上の場合, 次の補題からただちに従う.

補題 4. ([7]) \mathbb{H}^n における有限体積な直角多面体 Q^n が持つカスプの数を $c(Q^n)$ とする. $8 \leq n \leq 12$ において, Q^n の任意の $(n-1)$ 次元面がカスプを m 以上もつならば, $c(Q^n) \geq 3m - 2n + 1$ である.

双曲空間における直角多面体の「良い」性質を用いることで、補題4を証明することができる。ここでいう「良い」性質とは、

- (i) 直角多面体の面もまた直角多面体、
- (ii) Q^n の各カuspについて、そのカuspを共有する $(n-1)$ 次元面は、 $2(n-1)$ 個ある、
- (iii) カuspをもつ任意の $(n-1)$ 次元面について、そのカuspを共有し、かつその $(n-1)$ 次元面に平行である $(n-1)$ 次元面は唯一存在する、

のことである。

参考文献

- [1] E. B. Vinberg, *Absence of crystallographic reflection groups in Lobachevsky space of large dimension*, Trans. Mosc. Math. Soc., **47** (1985), 75-112.
- [2] E. B. Vinberg, *Hyperbolic reflection groups*, Usp. Mat. Nauk., **40** (1985), 29-64.
- [3] M. N. Prokhorov, *Absence of discrete reflection groups with non-compact fundamental polyhedron of finite volume in Lobachevskij spaces of large dimension*, Izv. Akad. Nauk SSSR., Ser. mat, **50** (1986), No.2, 413-424.
- [4] A. G. Khovanskij, *Hyperplane sections of polyhedra, toric varieties and discrete groups in Lobachevskij spaces*, Funkts. Anal. Prilozh., **20** (1986), No.1, 50-61.
- [5] L. Potyagailo and E. B. Vinberg, *On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces*, Comment. Math. Helv., **80** (2005), 1-12.
- [6] G. Dufour, *Notes on right-angled Coxeter polyhedra in hyperbolic spaces*, Geom. Dedicata., **147** (2009), 277-282.
- [7] J. Nonaka, *The number of cusps of right-angled polyhedra in hyperbolic spaces*, 投稿中.
- [8] V. Nikulin, *On the classification of arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces*, Math. USSR. Izv, **18** (1982), 99-123.
- [9] E. M. Andreev, *On convex polyhedra of finite volume in Lobachevskij spaces*, Math. USSR. Sb. **12** (1971), 255-259

CR 幾何における全 Q 曲率とその第二変分について

松本佳彦 (東大数理)

1 講演の概要

Branson の Q 曲率 [Br] は、曲面の Gauss 曲率 K_g の共形幾何学的高次元化にあたる量といえる。コンパクトな曲面上における $K_g dV_g$ の積分は Gauss–Bonnet の定理により位相不変であるが、特にその共形不変性 (計量を $\hat{g} = e^{2\Upsilon} g$ ($\Upsilon \in C^\infty(M)$) と取りかえても変わらないこと) は、Gauss 曲率の共形変換則が特徴的な形をしていることからただちにわかる。Branson の Q 曲率は偶数次元 Riemann 多様体 (M, g) に対して定義される関数 Q_g であって、同様の特徴的な共形変換則を持つ。このことからコンパクト多様体上では $Q_g dV_g$ の積分が共形不変量を与えることもわかり、この共形不変量 \bar{Q} 、すなわち全 Q 曲率の幾何学的意味を探るという興味深い問題が生じる。

これと同様のことを、強擬凸 CR 多様体 (Cauchy–Riemann 多様体) の幾何学においても考察することができる。CR 多様体とは、 $2n + 1$ 次元多様体 M (ここで $n \geq 1$ は整数) と、その複素化された接バンドル CTM の部分バンドル $T^{1,0}M$ の組であって、 $T^{1,0}M \cap \overline{T^{1,0}M} = 0$ であり、かつ次の可積分条件を満たすようなもののことである：

$$[\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subset \Gamma(T^{1,0}M).$$

その強擬凸性とは、 $\ker \theta = \text{Re } T^{1,0}M$ となるような微分 1 形式 θ を適切に取ったとき、対応して定まる Levi 形式と呼ばれる $T^{1,0}M$ 上の Hermite 形式が正定値となることをいう (特に θ は接触形式となる)。典型的には、複素多様体の C^∞ 級境界を持つ強擬凸領域 Ω の境界 $M = \partial\Omega$ が、そのような構造を自然に持つ (この場合、 $T^{1,0}M = (T^{1,0}\bar{\Omega})|_M \cap CTM$ である)。接触形式 θ は正值関数倍の自由度を持つので、 θ を指定することは、共形幾何学の場合に共形類を代表する Riemann 計量をひとつ指定することに相当すると言える。

CR Q 曲率の構成はさらに、可積分条件を次のように弱めた場合にも拡張することができる：

$$[\Gamma(T^{1,0}M), \Gamma(T^{1,0}M)] \subset \Gamma(T^{1,0}M \oplus \overline{T^{1,0}M}).$$

この条件を満たすようなものは、partially integrable な CR 多様体と呼ばれる (以下では、通常の CR 多様体を「可積分 CR 多様体」と呼ぶことにする)。実は「コンパクト可積分 CR 多様体の全 Q 曲率は 0 である」という予想があり、これはある程度一般的な可積分 CR 多様体 (擬 Einstein 接触形式を許すような可積分 CR 多様体) について正しいということが知られている。そのため、CR 幾何学における全 Q 曲率の研究は、partially integrable な CR 構造への拡張まで考察することで初めて意味を持つのだと思われる。この拡張について説明することが、本講演の大きな目的である。

さらに本講演では、partially integrable な CR 構造の変形に関する、全 CR Q 曲率 \bar{Q}_{CR} の振る舞いについて説明する。可積分な CR 構造においては \bar{Q}_{CR} の第一変分は 0 となるのであるが、そのような CR 構造における \bar{Q}_{CR} の第二変分について最近判明した、上述の予想を支持する次の事実を紹介する。

定理. $(M, T^{1,0}M)$ をコンパクト可積分 CR 多様体とし、さらに局所的には複素多様体の実超曲面として埋め込み可能であると仮定する。また、 $\psi \in C^\infty(M, \text{Sym}^2 T^{1,0}M)$ を、CR 構造の partially integrable な無限小変形を与える M 上のテンソルとする。そのとき、全 CR Q 曲率 \bar{Q}_{CR} の第二変分を与える微分作用素

$$\mathcal{O}^\bullet: C^\infty(M, \text{Sym}^2 T^{1,0}M) \rightarrow C^\infty(M, \text{Sym}^2 T^{1,0}M)$$

は、2つの微分作用素を合成したものとして表すことができる：

$$\mathcal{O}^\bullet = DN^\bullet.$$

ただし N^\bullet は、Nijenhuis テンソルの線型化を与える微分作用素である。

2 Q 曲率の構成

Q 曲率の構成については講演中に触れるが、その背景について詳しく説明することはできないので、ここでまとめておく。

2.1 2次元共形多様体（すなわち Riemann 面）の場合

共形幾何の場合には、偶数次元のために Q 曲率が定義されるのであった。最も次元が低いとき、すなわち曲面の場合には、 Q 曲率とは Gauss 曲率 K にほかならない。2つの共形的な Riemann 計量 $g, \hat{g} = e^{2\Upsilon}g$ (ここで $\Upsilon \in C^\infty(M)$) があるとき、それらの Gauss 曲率のあいだには次の関係式がある：

$$K_{\hat{g}} = e^{-2\Upsilon}(K_g + \Delta_g \Upsilon). \quad (**)$$

一方で $dV_{\hat{g}} = e^{2\Upsilon}dV_g$ だから、 $K_g dV_g$ の全積分が共形不変量であることがただちに従う。

高次元への拡張を考えるために、この共形変換則 (*) についてより深く理解したい。われわれの立場では、(*) を山辺作用素（共形ラプラシアン）の共形共変性からの“帰結”であるとみなす。山辺作用素とは、 $P_{2,g} = \Delta_g + \frac{N-2}{4(N-1)} \text{Scal}_g$ (ただし Scal_g はスカラー曲率) により定義される微分作用素 $P_{2,g}$ である (われわれはこの記号を $N \geq 2$ のときに用いる。 $N = 2$ の場合には、 $P_{2,g}$ はラプラシアン Δ_g そのものである)。一般に、Riemann 計量 g から定まる微分作用素 P_g が共形共変的であるというのは、ある定数 α, β が存在して $P_{\hat{g}} \circ e^{\alpha\Upsilon} = e^{\beta\Upsilon} \circ P_g$ が成り立つことを指す (ここで $e^{\alpha\Upsilon}, e^{\beta\Upsilon}$ は掛け算作用素を表している；別の言い方をすれば、共形共変性とは「適切な密度のあいだの作用素とみなせば共形不変」ということである)。山辺作用素 $P_{2,g}$ の場合には次が成り立つ：

$$P_{2,\hat{g}} \circ e^{-(N/2-1)\Upsilon} = e^{-(N/2+1)\Upsilon} \circ P_{2,g}. \quad (***)$$

この (***) を定数関数 1 に作用させると

$$\Delta_{\hat{g}} e^{-(N/2-1)\Upsilon} + \frac{N-2}{4(N-1)} e^{-(N/2-1)\Upsilon} \text{Scal}_{\hat{g}} = \frac{N-2}{4(N-1)} e^{-(N/2+1)\Upsilon} \text{Scal}_g$$

という等式が得られるが、ここでさらに“変数 N に関して、 $N = 2$ において微分する”という操作を (N は離散的な値しかとらないにもかかわらず!) 施せば、2次元における Gauss 曲率の共形変換則 (***) が得られるのである。この議論は厳密な証明とはいえないが、実際に正しい結果を導いている。

さらにここで、Gauss 曲率 K_g そのものも、 $\frac{2}{N-2} P_{2,g} 1$ の $N \rightarrow 2$ における極限として (***) から再現できていることに注意しておく。標語的に言えば、「Gauss 曲率 K_g とはラプラシアン Δ_g に隠れている定数項であって、 Δ_g を高次元に共形共変的に拡張することにより目に見えるようになる量」なのである。

2.2 4次元共形多様体の場合

4次元の場合に2次元のときの山辺作用素 $P_{2,g}$ と同じ役割を果たすのが, Paneitz 作用素 $P_{4,g}$ である. この作用素は次元が $N \geq 4$ のときに定義される:

$$P_{4,g} = \Delta_g^2 + \delta Td + \frac{N-4}{2}(\Delta J + \frac{N}{2}J^2 - 2|P|^2).$$

ただしここで, $J = \frac{1}{2(N-1)} \text{Scal}_g$, $P = \frac{1}{N-2}(\text{Ric}_g - Jg)$, $(T\alpha)_i = (N-2)J\alpha_i - 4P_i^j \alpha_j$ と書いた. すると, $P_{4,g}$ は

$$P_{4,\hat{g}} \circ e^{-(N/2-2)\Upsilon} = e^{-(N/2+2)\Upsilon} \circ P_{4,g} \quad (**4)$$

という共形共変性を持つ. 2次元のときと同じように, この両辺を定数関数 1 に作用させて $N = 4$ において微分することで

$$Q_{\hat{g}} = e^{-4\Upsilon}(Q_g + P_{4,g}\Upsilon) \quad (*4)$$

という式が得られる. ここで $Q_g = \Delta J + 2J^2 - 2|P|^2$ である. もちろんこの (**4) から (*4) を導く議論は厳密なものではないが, 実際に (*4) は正しい式になっている.

全 Q 曲率 \bar{Q} の共形不変性は, Q 曲率の共形変換則 (*4) と $P_{4,g}$ の自己共役性, および 4次元では $P_{4,g}$ を定数関数に作用させると 0 になることから従う. Chern–Gauss–Bonnet の公式によれば, この量は

$$\bar{Q} = 8\pi^2 \chi(M) - \frac{1}{4} \mathcal{W}, \quad \mathcal{W} = \int_M |W_g|_g^2 dV_g$$

と書き直すことができる. したがって, 多様体 M を固定して考えるならば, \bar{Q} は実質的には \mathcal{W} そのものだと言える. この \mathcal{W} は, Weyl 汎関数として古典的に知られている.

2.3 一般の偶数次元共形多様体の場合

2次元, 4次元の場合からわかるように, 一般の次元 n (n は偶数) における Q 曲率の構成は, 山辺作用素や Paneitz 作用素の一般化にあたるような作用素 $P_{n,g}$ の構成に帰着される. そのような $P_{n,g}$ の構成は, Graham–Jenne–Mason–Sparling によって行われた [GJMS]. 彼らの構成した $P_{n,g}$ は, GJMS 作用素と呼ばれている. この GJMS 作用素 $P_{n,g}$ をもとに, n 次元多様体に対する Q 曲率 Q_g が得られ, 次の共形変換則を満たすことが従う:

$$Q_{\hat{g}} = e^{-n\Upsilon}(Q_g + P_{n,g}\Upsilon). \quad (*n)$$

さらに $P_{n,g}$ が自己双対的で, しかも n 次元の場合には定数関数を零化することが示され, したがって全 Q 曲率 \bar{Q} が共形不変量であることがわかるのである.

以下で, GJMS 作用素 $P_{n,g}$ を作るための方法について述べる. 構成したいのは, N 次元 Riemann 多様体上の微分作用素 $P_{n,g}$ である (ただし $N \geq n$). 記述を簡単にするため, N も偶数であると仮定しよう. 第一の方法 ([GJMS] の方法) は Fefferman–Graham のアンビエント計量 [FG1, FG2] を用いたもので, 第二の方法 (Graham–Zworski [GZ] による) は, 与えられた共形多様体を “無限遠境界” として持つような, 共形コンパクト・アインシュタイン計量の漸近展開を使うものである. ここでは後者を詳しく説明する.

共形コンパクト計量とは, C^∞ 級の境界つき多様体 $\bar{X} = X \sqcup \partial X$ の内部 X において定義された Riemann 計量 g_+ であって, $\rho \in C^\infty(\bar{X})$ を境界定義関数とすると, $\rho^2 g_+$ が \bar{X} の境界まで計量として拡張するよう

なもののことである。このとき、境界 $M = \partial X$ の計量の共形類 $[g] = [(\rho^2 g_+)|_{TM}]$ が g_+ から決まるので、これを共形コンパクト計量 g_+ の共形無限遠と呼ぶ。逆の見方をすれば、境界 $M = \partial X$ 上の共形類 $[g]$ は、共形コンパクト計量 g_+ に対する境界条件としての意味を持つ。

ここにさらにアインシュタイン条件を課すことで、共形類 $[g]$ から標準的に定まる共形コンパクト計量 g_+ を得たい。実際には共形コンパクト・アインシュタイン計量の存在は未解決問題であるが、境界における漸近展開については一定のことがわかっている。特に、 $\rho^2 g_+$ が \bar{X} の境界まで C^∞ 級に拡張するという条件を課した上で $\text{Ric}_{g_+} = -n g_+ + O(\rho^{n-2})$ となるように g_+ を定めることが可能で、このとき g_+ は、 $O(\rho^{n-2})$ のオーダーの任意性と \bar{X} 上の微分同相の作用による任意性を除いて一意的である。そのような g_+ の構成は実質的に Fefferman–Graham のアンビエント計量の構成と等価なので、この g_+ を、Fefferman–Graham の近似的な共形コンパクト・アインシュタイン計量と呼ぶことにする。

この状況で、Graham–Zworski は次の定理を証明した。これを GJMS 作用素 $P_{n,g}$ の定義と考えることができる。

定理 (Graham–Zworski). C^∞ 級の境界つき $N+1$ 次元多様体 \bar{X} に対し、 $\partial X = M$ 上に共形類 $[g]$ を任意に与える。 g_+ を $[g]$ を共形無限遠とするような X 上の Fefferman–Graham の近似的共形コンパクト・アインシュタイン計量とする。共形類 $[g]$ を代表するような Riemann 計量 g に対し、 $(\rho^2 g_+)|_{TM} = g$ となるような境界定義関数 $\rho \in C^\infty(\bar{X})$ をとっておく。そのとき、任意の関数 $f \in C^\infty(M)$ に対し、次のような関数 $u \in C^\infty(X)$ が存在する：

$$\left(\Delta_{g_+} - \frac{1}{4}(N^2 - n^2)u \right) = 0, \quad u = \rho^{N/2-n/2}(F + \rho^n \log \rho \cdot G), \quad F, G \in C^\infty(\bar{X}), \quad F|_{\partial X} = f.$$

さらに、 $G|_{\partial X}$ は g のみから定まる微分作用素 P を用いて $G|_{\partial X} = Pf$ と表される。この微分作用素 P は、(定数倍を除いて) GJMS 作用素 $P_{n,g}$ そのものである。

2.4 CR 多様体の場合

(強擬凸) CR 多様体というのは、典型的には複素多様体の強擬凸領域 Ω の境界のことであった。このような状況では、 Ω 上の負曲率完備 Kähler–Einstein 計量 g_+ を考えることにより、 $M = \partial\Omega$ 上の自然な可積分 CR 構造は、計量 g_+ が誘導する構造であるとみなされる。この g_+ について、前小節で述べた Graham–Zworski のアプローチの類似を考えることにより、CR 多様体に対する Q 曲率を考えることができる。実際には Einstein 方程式を真に満たす計量 g_+ は存在しないかもしれないが、共形多様体の場合と同様、近似的な Einstein 計量を用いることでこの問題は回避することができる。

しかし、この完備 Kähler–Einstein 計量 g_+ を用いる方法で取り扱うことができるのは、可積分 CR 多様体だけである。(コンパクト) 可積分 CR 多様体の全 Q 曲率は常に 0 になると考えられており、全 Q 曲率を問題にしたいわれわれの立場では、partially integrable な CR 構造を扱うことが求められる。

これを可能にするのが、漸近的複素双曲計量の概念である。これは共形コンパクト計量の場合と同様に、 C^∞ 級境界つき実多様体 $\bar{X} = X \sqcup \partial X$ の内部で定義されるような Riemann 計量 (必ずしも Kähler であることを要請しない) であって、境界 $M = \partial X$ 上に partially integrable な CR 構造を誘導するような計量である (したがって M は奇数次元でなければならないから、 \bar{X} は偶数次元としておく)。その定義は実質的に [EMM] による。詳しい定義については講演中に議論することにして、本稿では [GS, M] を引用しておく。これについて、[M] で次の定理を証明した。

定理. C^∞ 級の境界つき $2n + 2$ 次元多様体 \bar{X} に対し, さらに Θ 構造と呼ばれる付加構造を考え, それと適合する partially integrable CR 構造 $T^{1,0}M$ を境界 $\partial X = M$ 上に任意に与える. そのとき, M に与えられた partially integrable CR 構造 $T^{1,0}M$ を誘導するような, Θ 接バンドルの計量として境界まで C^∞ 級に拡張する漸近的複素双曲計量 g_+ であって,

$$\text{Ric}_{g_+} = -\frac{n+2}{2}g_+ + O(\rho^{2n+2}) \quad (\Theta \text{ 接バンドル上のテンソルとして})$$

を満たすようなものが存在する. さらにそのような g_+ は, $O(\rho^{2n+2})$ のオーダーの任意性と Θ 構造を保つ微分同相による任意性を除けば一意である.

この計量 g_+ を用いて, partially integrable CR 多様体に対しても, Graham–Zworski のアプローチを用いて GJMS 作用素の類似および Q 曲率を定義することができる.

参考文献

- [Br] T. P. Branson, Sharp inequalities, the functional determinant, and the complementary series, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 3671–3742.
- [GJMS] C. R. Graham, R. Jenne, L. J. Mason, and G. A. J. Sparling, Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence, *J. London Math. Soc. (2)* **46** (1992), 557–565.
- [GS] C. Guillarmou and A. Sá Barreto, Scattering and inverse scattering on ACH manifolds, *J. Reine Angew. Math.* **622** (2008), 1–55.
- [GZ] C. R. Graham and M. Zworski, Scattering matrix in conformal geometry, *Invent. Math.* **152** (2003), 89–118.
- [EMM] C. L. Epstein, R. B. Melrose and G. A. Mendoza, Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains, *Acta Math.* **167** (1991), 1–106.
- [FG1] C. Fefferman and C. R. Graham, Conformal invariants, in *The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984)*, Astérisque, 1985, hors série, 95–116.
- [FG2] C. Fefferman and C. R. Graham, *The ambient metric*, Annals of Mathematics Studies, 178, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012, x+113 pp.
- [GS] C. Guillarmou and A. Sá Barreto, Scattering and inverse scattering on ACH manifolds, *J. Reine Angew. Math.* **622** (2008), 1–55.
- [M] Y. Matsumoto, Asymptotics of ACH-Einstein metrics, to appear in *J. Geom. Anal.*

ケーラー計量が成す空間の測地線と カラビ型汎関数の最小値について

久本智之 (名古屋大学多元数理科学研究科)

X を n 次元複素多様体, L をその上の正直線束とする. L の第 1 チャーン類に属するケーラー計量 $\omega \in c_1(L)$ が存在し, このようなものを一つ固定すると同じコホモロジー類に属するケーラー計量は

$$\omega_\varphi = \omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\varphi$$

と書ける. さらにポテンシャル関数 $\varphi \in C^\infty(X; \mathbb{R})$ は定数差を除いて一意に決まる. 我々の考察対象はケーラー計量の空間

$$\mathcal{H} := \left\{ \varphi \in C^\infty(X; \mathbb{R}) \mid \omega_\varphi > 0 \right\}$$

である. ここには K エナジーと呼ばれる自然な汎関数

$$\mathcal{M} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

が存在し, K エナジーの臨界点がスカラー曲率一定なケーラー計量を与えるからである. \mathcal{H} の一点における接空間は $C^\infty(X; \mathbb{R})$ と自然に同一視され, 自然なリーマン計量

$$\|u\|^2 := \int_X u^2 \omega_\varphi^n / n! \quad \text{for } u \in T_\varphi \mathcal{H}$$

によって無限次元リーマン多様体の構造が入る. K エナジーの固有性 (properness) を判定する上で重要な事実は, それを任意の測地線に制限すると t についての凸関数になる, というこ
とである. 与えられた曲線 φ_t の測地曲率を定義から計算すると

$$c(\varphi_t) = \ddot{\varphi}_t - |\bar{\partial}\dot{\varphi}_t|_{\omega_{\varphi_t}}^2$$

となる. $\dot{\varphi}_t = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\ddot{\varphi}_t = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ と了承すれば複素変数に対してもこれは意味を持ち, さらに $\Phi(\tau, x) := \varphi_{-\log|\tau|}(x)$ と変数変換すれば Semmes の公式

$$\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}_{\tau,x}\Phi\right)^{n+1} = n \cdot c(\varphi_t) \left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}_x\varphi_t\right)^n \wedge \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} dt \wedge d\bar{t}$$

が成り立つ. すなわち測地線であるという条件はモンジュ・アンペール方程式 $\left(\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}_{\tau,x}\Phi\right)^{n+1} \equiv 0$ に翻訳され, これによって測地線の方程式の弱解を定義することができるようになる.

このような一般化された意味での測地線は、代数幾何学的には偏極多様体 (X, L) のある種の変形族と見なすことができ、スカラー曲率一定ケーラー計量の存在と幾何学的不変式論の意味での安定性が同値であろうという一連の予想 (Yau–Tian–Donaldson) につながる。今しばらくこの点について説明する。同変な \mathbb{C}^* 作用を持つ偏極多様体 (スキーム) の平坦族 $\mu : (\mathcal{X}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{C}$ が $(\mathcal{X}_1, \mathcal{L}_1) = (X, L)$ を満たすとき、 (X, L) のテスト配位と呼ぶ。さらに \mathcal{X} は正規多様体であると仮定する。するとディリクレ境界値問題

$$\begin{cases} (\omega + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial \bar{\partial}_{\tau, x} \Phi)^{n+1} \equiv 0 & \text{on } |\tau| < 1 \\ \Phi(\tau, x) = 0 & \text{if } |\tau| = 1 \end{cases}$$

の解が存在し、 $\varphi_t(x) := \Phi(\rho(e^{-t})x)$ は \mathcal{H} 上に弱い意味での測地線を定める。このようにしてテスト配位から弱測地線への対応が得られる。一般には C^∞ 級の測地線を得ることはできない。

一方、各自然数 k に対して \mathbb{C}^* 作用に関する固有分解を $H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^{\otimes k}) = \bigoplus_{i=1}^{N_k} V_{\lambda_i}$ とおけば、漸近展開

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_k} \lambda_i}{k N_k} = F_0 + F_1 k^{-1} + O(k^{-2})$$

が成り立つことが知られている。係数 F_1 は Donaldson–二木不変量と呼ばれ、非自明なテスト配位に対し常に $F_1 < 0$ となるとき (X, L) は K-安定であると言う。 $t \rightarrow \infty$ とすれば $\tau \rightarrow 0$ で、このとき K エナジーの φ_t に沿った勾配は $-F_1$ で与えられると予想されている。そして (X, L) の K-安定性はスカラー曲率一定ケーラー計量の存在と同値であろう、というのが Yau–Tian–Donaldson 予想である。定スカラー曲率ケーラー計量が存在すれば K 安定であることは近年証明された ([4], [14], [8])。計量の存在については未解決であるが、カラビ・ヤウ多様体や、偏極が標準束で与えられている場合には解決している。特に重要なファノ多様体について昨年解決がアナウンスされた ([3], [17])。我々が今回注目したいのは、Donaldson [4] の示した次の不等式である：

$$\left(\int_X (S_\omega - \hat{S})^2 \frac{\omega^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{F_1}{\|\mu\|}.$$

左辺はいわゆるカラビ汎関数、 S_ω は ω のスカラー曲率である。 $\|\mu\| \geq 0$ は Donaldson によって導入された不変量で、

$$\|\mu\|^2 := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_k} (\lambda_i - \hat{\lambda})^2}{k^{n+2}}$$

によって定義される。上の不等式から特に、定スカラー曲率ケーラー計量が存在すれば $F_1 \leq 0$ 、すなわち (X, L) が K 半安定であることが従う。今回の研究で我々は、不変量 $\|\mu\|$ の解析的な特徴付けを与えた。

Theorem 1 ([6], Theorem 1.2). 偏極多様体 (X, L) のテスト配位 \mathcal{T} を任意に取り、ケーラー計量の空間上対応する測地線を φ_t とする。測地線の接ベクトル $\dot{\varphi}_t$ は X 上の関数と見な

せる. このとき,

$$\|\mu\| = \left(\int_X (\dot{\varphi}_t)^2 \frac{\omega_{\varphi_t}^n}{n!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

特に $\|\mu\| = 0$ ならば対応する測地線は自明であることが従う. 中心ファイバー \mathcal{X}_0 が滑らかな時は [18] によって知られていた. 我々の証明は, [13] による φ_t の別構成と, 次数付き線形系の体積を解析的に表す公式 [5] に基づく. さらに一般の L^p -ノルムに対応する不変量 $\|\mu\|_p$ を

$$\|\mu\|_p^p := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_i |\lambda_i - \hat{\lambda}|^p}{k^{n+p}}$$

と定義すると

$$\|\mu\|_p = \left(\int_X |\dot{\varphi}_t|^p \frac{\omega_{\varphi_t}^n}{n!} \right)^{\frac{1}{p}}$$

が成り立つことも示せる. 上の定義において $p \neq 2$ のとき上極限が極限になることは自明ではないが, これも正しい.

Theorem 1 から, Donaldson の不等式に対し自然な解釈を与えることができる. すなわち Donaldson–二木不変量に関する前述の予想を認めれば

$$-F_1 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=\infty} \mathcal{M}(\varphi_t) \quad (1)$$

であり, K エナジーの測地凸性より

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=\infty} \mathcal{M}(\varphi_t) \geq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{M}(\varphi_t) \quad (2)$$

だが, ヘルダーの不等式から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{M}(\varphi_t) &= - \int_X \dot{\varphi}_0 (S_\omega - \hat{S}) \omega^n / n! \\ &\geq - \left(\int_X |S_\omega - \hat{S}|^q \omega^n / n! \right)^{1/q} \left(\int_X |\dot{\varphi}_0|^p \omega^n / n! \right)^{1/p} \end{aligned}$$

($1/p + 1/q = 1$) を得る. 残念ながら (1) は予想であり, (2) については弱測地線に対して K エナジーの妥当な定義が見つかっていない. ただしファノ多様体 ($L = -K_X$) の場合は K エナジーの代わりに Ding の汎関数を用いれば (1), (2) に対応する結果がそれぞれ [1], [2] で確立されており, 我々は Donaldson の不等式の類似を一般の L^q ノルムに対して得ることができる.

Theorem 2 ([6], Theorem 1.3). X をファノ多様体, ω を X の第 1 チャーン類に属するケーラー計量とする. 関数 h を, $\text{Ric}(\omega) - \omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}h$ を満たすものとして取り,

$\int_X (e^h - 1) \frac{\omega^n}{n!} = 0$ が成り立つよう正規化しておく. このとき, $1/p + 1/q = 1$ を満たす任意の指数 $1 \leq p, q \leq \infty$ に対し不等式

$$\left(\int_X |e^h - 1|^q \frac{\omega^n}{n!} \right)^{\frac{1}{q}} \geq \frac{F_1}{\|\mu\|_p}$$

が成り立つ.

最後にノルム $\|\mu\|_p$ を考えることの意義と, 将来への展望を述べる. 一般の偏極多様体に対し K 安定性から定スカラー曲率ケーラー計量の存在が言えるかどうかは未解決であり, あるいはより強い安定性が必要なのではないかという示唆が Székelyhidi, 満洲らにより与えられている ([15], [16], [9], [10], [11]). 実際, 計量の存在を示す上ではテスト配位のなす列の極限を取り扱う必要があり, そのような状況では Donaldson–二木不変量そのものよりも, F_1 をノルムで割って正規化したものが本質的な役割を果たす. これはカラビ型汎関数の視点からも自然であると言える. 例えば Székelyhidi [15] は次のような条件 (一様安定性) を考察している.

$$F_1 \leq -\varepsilon \|\mu\|_{\frac{n}{n-1}}$$

ここで ε はテスト配位 μ に依らない定数である. この定義では整数でない $p = \frac{n}{n-1}$ を考えることが必要である. ノルムを考える動機は他にもある. Li–Xu [7] の挙げているような病理的な例をテスト配位の定義からどう除外するかが一つの課題となっている. Li–Xu のテスト配位では $\|\mu\| = 0$ となっており, ノルムを考えることでこのような例を除外することができる.

参考文献

- [1] R. J. Berman: *K-polystability of Q-Fano varieties admitting Kahler–Einstein metrics*. arXiv:1205.6214.
- [2] B. Berndtsson: *A Brunn–Minkowski type inequality for Fano manifolds and the Bando–Mabuchi uniqueness theorem*. arXiv:1103.0923.
- [3] G. Tian: *Kahler–Einstein metrics and stability*. arXiv:1210.7494
- [4] S. K. Donaldson: *Lower bounds on the Calabi functional*. J. Differential Geom. **70** (2005), no. 3, 453–472.
- [5] T. Hisamoto: *On the volume of graded linear series and Monge–Ampère mass*. Math. Z., doi:10.1007/s0020901211336.
- [6] T. Hisamoto: *On the limit of spectral measures associated to a test configuration*. arXiv:1211.2324.
- [7] C. Li and C. Xu: *Special test configurations and K-stability of Fano varieties*. arXiv:1111.5398.
- [8] T. Mabuchi: *K-stability of constant scalar curvature polarization*. arXiv:0812.4093.
- [9] T. Mabuchi: *A stronger concept of K-stability*. arXiv:0910.4617.

- [10] T. Mabuchi: *The Donaldson-Futaki invariant for sequences of test configurations*. arXiv:1307.1957.
- [11] T. Mabuchi: *The Yau-Tian-Donaldson Conjecture for general polarizations*. arXiv:1307.3623.
- [12] D. H. Phong and J. Sturm: *Test configurations for K-stability and geodesic rays*. J. Symplectic Geom. **5** (2007), no. 2, 221–247.
- [13] J. Ross and D. Witt Nyström: *Analytic test configurations and geodesic rays*. arXiv:1101.1612.
- [14] J. Stoppa: *K-stability of constant scalar curvature Kähler manifolds*. Adv. Math. **221** (2009), no. 4, 1397–1408.
- [15] G. Székelyhidi: *Extremal metrics and K-stability (PhD thesis)*. arXiv:math/0611002.
- [16] G. Székelyhidi: *Filtrations and test-configurations*. arXiv:1111.4986.
- [17] X. Chen, S. K. Donaldson, and S. Sun: *K-stability and Kähler-Einstein metrics*. arXiv:1211.4669.
- [18] D. Witt Nyström: *Test configurations and Okounkov bodies*. Compositio Math. **148** (2012), 1736–1756.

非コンパクトトーリックケーラー多様体の構成とその応用について

興津 優史 (東京工業大学理工学研究科)*

1 序

シンプレクティックトーリック多様体の分類は, コンパクトの場合に Delzant [1] によってなされている. これによるとコンパクトシンプレクティックトーリック多様体の同型類は, Delzant polytope と呼ばれる凸多面体と一対一に対応する. さらに, シンプレクティック錐の場合には (接触トーリック多様体の分類定理として) Lerman [5] の分類定理が知られている. この場合は, トーラス作用が自由でない場合には, 同型類と good cone と呼ばれる凸多面錐との対応がある. また, 一般の非コンパクトシンプレクティックトーリック多様体の分類定理が Karshon と Lerman [2] によって得られている. これらの定理において重要な役割を果たすのはモーメント写像とその像であり, モーメント像から元々の多様体を構成する方法は [1, 5] においては Delzant 構成, [2] においては崩壊関手が用いられている. ここで注意したい事は Delzant 構成された多様体には自然なケーラー構造が存在するが, 崩壊関手によって構成された多様体においては, そのような自然なケーラー構造は決まらないということである. 本講演では, Delzant polytope や good cone を含むような凸多角的集合であるユニモジュラ集合という集合を新たに導入し, Delzant 構成よりも広いクラスのシンプレクティックトーリック多様体を構成することが出来るカット構成を紹介する. これは崩壊関手を明示的に書き下したものであるが, それによって自然なケーラー構造を決定することが出来るという点が崩壊関手とは異なる. さらにこれの応用として, [5] において構成されていない接触トーリック多様体のクラスをすべて得ることが出来る. ([5] では, good cone に対応する接触トーリック多様体を Delzant 構成を用いて構成しているが, 頂点を持たない good cone に対しては Delzant 構成を適用することが出来ない. したがって, そのような good cone に対応する接触トーリック多様体は得られていなかった.) なお, [5] の分類定理に漏れがある事は横山氏 [6] によっても指摘されている.

2 定義

$i = 1, \dots, N$ に対して, $\eta_i := (\eta_i^1, \dots, \eta_i^n) \in \mathbb{R}^n$ を外向きの法ベクトルとする切片 $(\kappa_1, \dots, \kappa_N)$ の凸多角的集合 (convex polyhedral set) とは $\Pi := \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, \eta_i \rangle \leq \kappa_i, i = 1, \dots, N\}$ であるとする.

定義 1. Δ を凸多角的集合 Π の相対開部分集合とする. このとき Δ がユニモジュラ集合であるとは次の 3 つの条件を満たすことである:

* okitsu.y.aa@m.titech.ac.jp

- (1) もし、 Δ が頂点を持つならば、それは単純である。つまり、各頂点では次元と同じ本数の辺が出会っている;
- (2) Δ の $n-1$ 次元面に対応する各法ベクトル η_{i_k} は \mathbb{Z}^n の原始的な元である;
- (3) 任意の部分集合 $I \subset \{1, \dots, N\}$ に対して、 $\Delta \cap F_I \neq \emptyset$ ならば $\{\eta_i\}_{i \in I}$ はトーラス $T^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$ の部分トーラスの整格子の \mathbb{Z} -基底である。ただし、 $F_I := \{x \in \Pi \mid \langle x, \eta_i \rangle = \kappa_i, i \in I\}$ とおいた。

さらに凸多角的集合の強凸性・弱凸性を次のように定義する:

定義 2. 凸多角的集合 $\Pi := \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, \eta_i \rangle \leq \kappa_i, i = 1, \dots, N\}$ が強凸であるとは、 $\text{R-span}\{\eta_1, \dots, \eta_N\} = (\mathbb{R}^n)^*$ が満たされることである。さらにユニモジュラ集合が強凸であるとは強凸な凸多角的集合の相対開集合であるということとする。また、ユニモジュラ集合が強凸でない場合、これを弱凸であると呼ぶ。

3 カット構成

ユニモジュラ集合の定義を見れば分かるように、弱凸なユニモジュラ集合は頂点 (零次元面) を持たないため、これに対応するシンプレクティックトーリック多様体を Delzant 構成することは出来ない。よってこれに対応するシンプレクティックトーリック多様体を構成する為にカット構成が必要である。これは次のように与えられる:

補題. ある開集合 U と凸多角的集合 $\Pi := \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, \eta_i \rangle \leq \kappa_i, i = 1, \dots, N\}$ が存在して、ユニモジュラ集合が $\Delta = U \cap \Pi$ と与えられているとする。ここで、 $(U \times T^n \times \mathbb{C}^N, \sum_i dx_i \wedge d\theta_i + \sqrt{-1} \sum_{i=1}^N dz_i \wedge d\bar{z}_i, T^n \times T^N, \Phi \oplus \mu)$ を次の様なトーラス作用を持つハミルトン $T^n \times T^N$ -空間とする:

$$(s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_N) \cdot (x, \theta, z_1, \dots, z_N) = (x, \theta + \sum_{i=1}^n s_i e_i + \sum_{i=1}^N t_i \eta_i, e^{\sqrt{-1}t_1} z_1, \dots, e^{\sqrt{-1}t_N} z_N), \quad (1)$$

ただし、 (x, θ) は $U \times T^n \subset T^*T^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$ の作用-角座標であって、 e_i たちは \mathbb{R}^n の標準基底とする。このとき、モーメント写像は次で与えられる:

$$\Phi \oplus \mu : T^*T^n \times \mathbb{C}^N \rightarrow (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^N)^*, (x, \theta, z_1, \dots, z_N) \mapsto x \oplus (\langle x, \eta_1 \rangle + \|z_1\|^2 - \kappa_1, \dots, \langle x, \eta_N \rangle + \|z_N\|^2 - \kappa_N). \quad (2)$$

最後に T^N のハミルトン作用についてシンプレクティック商を取ることによって、多様体 $M_\Delta := \mu^{-1}(0)/T^N$, その上に誘導されるシンプレクティック形式 ω_Δ , T^n -作用, そのモーメント写像 Φ_Δ を得る。これについて $\text{Im}\Phi_\Delta = \Delta$ が成立する。

これによって、ユニモジュラ集合 Δ に対してモーメント像が Δ となるシンプレクティックトーリック多様体を構成することが出来る。さらにこれのケーラー構造も得ることが出来る。まとめると次が成立する:

定理 1 (O). ある開集合 U と凸多角的集合 $\Pi := \{x \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \langle x, \eta_i \rangle \leq \kappa_i, i = 1, \dots, N\}$ が存在して、ユニモジュラ集合が $\Delta = U \cap \Pi$ と与えられているとする。このとき Δ に対応するシンプレクティックトーリック多様体が存在して、自然なケーラー構造を持つ。このケーラー構造は次のシンプレクティックポテンシャルによって与えられる:

$$\text{Sp}(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N l_i(x) \log l_i(x) - \frac{1}{2} l_\infty(x), \quad (3)$$

ただし、 $l_1(x) := \kappa_1 - \langle x, \eta_1 \rangle, \dots, l_N(x) := \kappa_N - \langle x, \eta_N \rangle, l_\infty(x) := \sum l_i(x)$ である。

4 主結果

Δ がユニモジュラな凸多面錐である場合, モーメント像と球面の共通部分のモーメント写像による逆像はトーリック接触多様体となるが, Δ が弱凸な場合, これは [5] において構成されていない例となっている. これらを弱凸トーリック接触多様体と呼ぶ. これについて次の様な特徴付けを得た:

定理 2 (O). 弱凸トーリック接触多様体はトーリック K -接触構造を持ち得ない. 特にトーリック佐々木構造を持ち得ない.

これは強凸なモーメント錐に対応するトーリック接触多様体が自然にトーリック佐々木構造を持つことと対照的である.

参考文献

- [1] T. Delzant, Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. (French) [Periodic Hamiltonians and convex images of the momentum mapping] Bull. Soc. Math. France 116 (1988), no. 3, 315–339.
- [2] Y. Karshon and E. Lerman, Non-compact symplectic toric manifolds. arXiv:0907.2891
- [3] E.Lerman, Symplectic cuts. Math. Res. Lett. 2 (1995), no. 3, 247–258.
- [4] E.Lerman, Contact Cuts, Israel J. Math , 124 (2001), 77–92.
- [5] E.Lerman, Contact toric manifolds, J. Symplectic Geom. 1 (2003), no. 4, 785–828.
- [6] K. Yokoyama, The classification of contact toric manifolds, Master's thesis, Tokyo Institute of Technology, 2007.

四次元開多様体と反自己双対接続と局所平均次元

松尾 信一郎

第 60 回幾何学シンポジウム

概要

四次元開多様体上の無限エネルギー反自己双対接続のなす無限次元モジュライ空間を Gromov の平均次元の観点から研究した。特に、四次元開多様体が $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ のとき、その局所平均次元を決定した。京都大学の塚本真輝氏との共同研究である。

1 序

四次元多様体論における Donaldson 理論は Atiyah-Hitchin-Singer[1] により端緒が開かれた。その主定理は四次元有向反自己双対正スカラー曲率コンパクト Riemann 多様体上の反自己双対接続のモジュライ空間の次元公式である。我々はその非コンパクト四次元多様体への拡張を試み、特にモジュライ空間が無限次元になる状況を研究した。

2 モジュライ空間 M_d

$Z := \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}$ として、標準的直積計量を与える。計量の定める Hodge 作用素を $*$ とする。また、 $P := Z \times \mathrm{SU}(2)$ を X 上の自明束として、 \mathfrak{g}_P を随伴 $\mathfrak{su}(2)$ 束とする。

P の自己同型は P の接続に作用する。その作用による接続 A の同値類を $[A]$ と書き、 A のゲージ同値類と呼ぶ。

A を P の接続として、 F_A をその曲率とする。 A が反自己双対接続であるとは、反自己双対方程式

$$F_A + *F_A = 0$$

を充たすことである。接続が反自己双対接続であることは P の自己同型の作用により不変な条件である。

接続 A の曲率 F_A は \mathfrak{g}_P に値をとる二次形式であり、従って、各点 $z \in Z$ において線型

写像

$$F_A(z): \wedge^2 TZ_z \rightarrow \mathfrak{su}(2)$$

を定める. この線型写像の作用素ノルムを $|F_A|_{\text{op}}(z)$ として, $\|F_A\|_{\text{op}} := \sup_{z \in Z} |F_A|_{\text{op}}(z)$ とする. 反自己双対接続 A に対して, その曲率の作用素ノルム $\|F_A\|_{\text{op}}$ と L^∞ ノルム $\|F_A\|_\infty$ は, 不等式

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \|F_A\|_\infty \leq \|F_A\|_{\text{op}} \leq \|F_A\|_\infty$$

により結ばれている. 曲率の作用素ノルムと L^∞ ノルムは P の自己同型の作用により不変である.

定義 1. $d \geq 0$ を非負実数とする. モジュライ空間 M_d を, 反自己双対接続 A であって

$$\|F_A\|_{\text{op}} \leq d$$

を満たすもののゲージ同値類からなる集合として, 定める. M_d には広義一様収束位相を与える. このとき, M_d はコンパクトかつ距離化可能である. また, 実数 \mathbb{R} は M_d に自然に連続に作用する.

$0 < d < 1$ のとき, M_d は自明平坦接続のゲージ同値類だけからなる一点集合である. $d = 1$ のとき, M_d は BPST インスタントンの $Z = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ による引き戻しを含む. また, $1 < d$ のとき, M_d は無限次元である.

3 エネルギー密度 $\rho(d)$

我々は, 第二 Chern 数の正規化として, 接続のエネルギー密度を導入した.

P の接続 A のエネルギー密度 $\rho(A)$ を

$$\rho(A) := \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \left[\sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3 \times [t, t+T]} |F_A| d\text{vol} \right] \right)$$

により定める. この極限は常に存在する. エネルギー密度は P の自己同型の作用により不変である.

定義 2. 非負実数 $d \geq 0$ に対して,

$$\rho(d) := \sup\{\rho(A) \mid [A] \in M_d\}$$

と定める.

$0 < d < 1$ のとき, $\rho(d) = 0$ であり, $1 < d$ のとき, $\rho(d) > 0$ である. また, $d \rightarrow \infty$ のとき, $\rho(d) \rightarrow \infty$ となる. ρ は d の単調非減少関数である.

定義 3. ρ の左不連続点の全体を \mathcal{D} とする.

ρ は単調非減少関数なので, \mathcal{D} は高々可算集合である.

4 局所平均次元 $\dim_{loc}(M_d : \mathbb{R})$

平均次元とはコンパクト力学系の位相不変量であり, Gromov[2] が導入した. 局所平均次元は平均次元の変種であり, 論文 [4] が導入した. 局所平均次元もコンパクト力学系の位相不変量である. この節では局所平均次元の定義を述べる.

(X, d) をコンパクト距離空間として, \mathbb{R} が X に連続に作用しているとする.

$\epsilon > 0$ を正実数とせよ. 位相空間 Y と連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, f が ϵ -埋め込みであるとは, 任意の点 $y \in Y$ に対して $\text{Diam}_d(f^{-1}(y)) \leq \epsilon$ が成り立つことである. このとき, 各正実数 $\epsilon > 0$ に対して, n 次元多面体 P と ϵ -埋め込み $f: X \rightarrow P$ が存在する自然数 n の最小値を (X, d) の幅次元といい, $\text{Widim}_\epsilon(X, d)$ と書く.

次に, \mathbb{R} の部分集合 $\Omega \subset \mathbb{R}$ が与えられたとせよ. このとき, X 上の新しい距離 d_Ω を

$$d_\Omega(x, y) := \sup_{t \in \Omega} d(t \cdot x, t \cdot y)$$

により定める. ただし, 実数 t の点 x への作用を $t \cdot x$ とした. また, 各正実数 $r > 0$ と各点 $p \in X$ に対して, X の部分閉集合 $B_r(p)_\mathbb{R}$ を

$$B_r(p)_\mathbb{R} := \{x \in X \mid d_\mathbb{R}(p, x) \leq r\}$$

により定める.

定義 4. まずは点 $p \in X$ における局所平均次元 $\dim_p(X : \mathbb{R})$ を

$$\dim_p(X : \mathbb{R}) := \lim_{r \rightarrow 0} \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\text{Widim}_\epsilon(B_r(p)_\mathbb{R}, d_{(t, t+T)})}{T} \right]$$

と定める. この極限は常に存在し, 位相と両立する距離の取り方に依らない. 次に局所平均次元 $\dim_{loc}(X : \mathbb{R})$ を

$$\dim_{loc}(X : \mathbb{R}) := \sup_{p \in X} \dim_p(X : \mathbb{R})$$

と定める. 局所平均次元は \mathbb{R} が連続に作用するコンパクト距離化可能空間の不変量である.

我々のモジュライ空間 M_d は \mathbb{R} が連続に作用するコンパクト距離化可能空間だったので、その平均次元 $\dim_{loc}(M_d : \mathbb{R})$ が考えられる。

5 主定理 $\dim_{loc}(M_d : \mathbb{R}) = 8\rho(d)$

定理 5. [3, Theorem 1.2.] 任意の非負実数 $d \in [0, \infty) \setminus \mathcal{D}$ に対して、平均次元公式

$$\dim_{loc}(M_d : \mathbb{R}) = 8\rho(d)$$

が成り立つ。

6 証明のための鍵となる概念 $\exists \delta \exists T \forall t \|F_A\|_{L^\infty(\mathbb{S}^3 \times [t, t+T])} \geq \delta$

論文 [4] では、周期的反自己双対接続に対する Kodaira-Spencer 型変形理論を発展させることにより、局所平均次元 $\dim_{loc}(M_d : \mathbb{R})$ が満たすべき不等式が導出された。

論文 [3] では、周期的反自己双対接続を含む概念である非退化反自己双対接続を導入し、非退化反自己双対接続に対する Kodaira-Spencer 型変形理論を発展させた。その結果、平均次元が満たすべき等式が導出された。

定義 6. P の接続 A が非退化であるとは、正実数 $\delta > 0$ と $T > 0$ が存在し、任意の実数 $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\|F_A\|_{L^\infty(\mathbb{S}^3 \times [t, t+T])} \geq \delta$$

を満たすこととする。

非退化反自己双対接続に対する Kodaira-Spencer 型変形理論により次が示される。

定理 7. [3, Theorem 1.10.] A を非退化反自己双対接続であって $\|F_A\|_{\text{op}} < d$ を満たすものとせよ。特に $[A] \in M_d$ である。このとき、

$$\dim_{[A]}(M_d : \mathbb{R}) = 8\rho(A)$$

が成り立つ。

また、無限個のインスタントンを貼り合わせるにより次が示される。

定理 8. [3, Theorem 1.11.] $d > 1$ とせよ。 A を反自己双対接続であって $\|F_A\|_{\text{op}} < d$ を満たすものとせよ。特に $[A] \in M_d$ である。任意の正実数 $\epsilon > 0$ に対して、非退化反自己双対

接続 B が存在して, $\|F_B\|_{\text{op}} < d$ かつ

$$\rho(B) > \rho(A) - \epsilon$$

が成り立つ.

すなわち, エネルギー密度に関して, M_d の全ての元は非退化反自己双対接続により近似できる.

この二つの定理から主定理は従う.

まず $0 < d < 1$ のとき, M_d は一点集合なので, 両辺は零となり, 確かに正しい.

次に $1 < d$ のとき, A を反自己双対接続であつて $\|F_A\|_{\text{op}} < d$ を満たすものとせよ.

定理 8 より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 非退化反自己双対接続 B が存在して, $\|F_B\|_{\text{op}} < d$ かつ $\rho(B) > \rho(A) - \epsilon$ を満たす. さらに, 定理 7 を合わせて,

$$\dim_{\text{loc}}(M_d : \mathbb{R}) \geq \dim_{[B]}(M_d : \mathbb{R}) \geq 8\rho(B) \geq 8(\rho(A) - \epsilon)$$

が成り立つ. 従つて, ϵ は任意だったので, $\|F_A\|_{\text{op}} < d$ を満たす任意の反自己双対接続 A に対して, $\dim_{\text{loc}}(M_d : \mathbb{R}) \geq \rho(A)$ である. さて, ρ の定義より, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 反自己双対接続 A が存在して, $\|F_A\|_{\text{op}} < d$ かつ $\rho(d - \epsilon) \leq \rho(A) \leq \rho(d)$ を満たす. よつて, d が ρ の左不連続点ではないとき, つまり, $d \notin \mathcal{D}$ のとき,

$$\dim_{\text{loc}}(M_d : \mathbb{R}) \geq \rho(d)$$

となる. 上からの不等式 $\dim_{\text{loc}}(M_d : \mathbb{R}) \leq \rho(d)$ は論文 [4, Theorem 1.2.] により示されていた. これで主定理は示された.

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, Vol. 362, No. 1711, pp. 425–461, 1978.
- [2] Misha Gromov. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps. I. *Math. Phys. Anal. Geom.*, Vol. 2, No. 4, pp. 323–415, 1999.
- [3] Shinichiroh Matsuo and Masaki Tsukamoto. Local mean dimension of asd moduli spaces over the cylinder. *arXiv:1302.5977*.
- [4] Shinichiroh Matsuo and Masaki Tsukamoto. Instanton approximation, periodic ASD connections, and mean dimension. *J. Funct. Anal.*, Vol. 260, No. 5, pp. 1369–1427, 2011.

極大なトーラス作用を持つ複素閉多様体について

石田 裕昭 (京都大学数理解析研究所 日本学術振興会特別研究員(PD))*

1. 序

M を連結な実多様体, G をコンパクトトーラスとし, M に効果的に作用しているものとする. M の各点 x に対して, 接空間 $T_x M = T_x(G \cdot x) \oplus T_x M / T_x(G \cdot x)$ は固定部分群 G_x の表現であり, $T_x(G \cdot x)$ は自明, $T_x M / T_x(G \cdot x)$ は忠実な表現になる. 特に M の各点 x に対して次の不等式を得る:

$$2 \dim G_x \leq \dim M - \dim G \cdot x, \quad \forall x \in M. \quad (1)$$

不等式 (1) は次のように書き直すことができる:

$$\dim G + \dim G_x \leq \dim M, \quad \forall x \in M. \quad (2)$$

例 1.1. コンパクトトーラス G が連結な実多様体 M に固定点 x を持つように効果的に作用しているとき, $2 \dim G \leq \dim M$.

不等式 (2) を動機として, トーラス作用の極大性を次のように定義する:

定義 1.2. M を連結な実多様体, G をコンパクトトーラスとし, M に効果的に作用しているものとする. M への G -作用が**極大**であるとは, ある点 $x \in M$ に対して次の等式を満たすときを言う:

$$\dim G + \dim G_x = \dim M, \quad \exists x \in M. \quad (3)$$

定義 1.2 の意味で極大であるとき, G よりも大きなコンパクトトーラスは M に効果的に作用できない. この事実が極大と呼ぶ由来である. 実際, 次の命題が成り立つ:

命題 1.3. M を連結な実多様体, G' をコンパクトトーラスとし, M に効果的に作用しているものとする. $G \subseteq G'$ を部分トーラスとし, M への G' -作用の G への制限が, 定義 1.2 の意味で極大であるとする. このとき, $G = G'$. □

本講演では,

- M は複素閉多様体,
- G はコンパクトトーラス, M に極大に作用, M の複素構造を保つ

ような (M, G) の分類について論じる.

2. いくつかの例

例 2.1 (コンパクト複素トーラス). Γ を \mathbb{C}^n の格子とし, $M = G = \mathbb{C}^n / \Gamma \cong (S^1)^{2n}$ とする. このとき, 任意の点 $x \in M$ に対して等式 (3) が成り立ち, M への G -作用は M の複素構造を保つ.

例 2.2 (非特異かつ完備なトーリック多様体). M を非特異かつ完備な複素 n 次元トーリック多様体とする. トーリック多様体の定義より M は正則, 効果的な $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用を持ち, かつ固定点 $x \in M^{(\mathbb{C}^*)^n}$ を持つ. $G = (S^1)^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$ とすると, 固定点 $x \in M^{(\mathbb{C}^*)^n} = M^{(S^1)^n}$ において等式 (3) が成り立つ.

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町
e-mail: ishida@kurims.kyoto-u.ac.jp

例 2.2 に関しては, Y. Karshon と講演者との共同研究について, ある意味で逆も成り立つことが示されている.

定理 2.3 (I-Karshon, [3]). M を複素 n 次元の複素閉多様体とする. $(S^1)^n$ が M に効果的かつ M の複素構造を保つように作用しているとする. このとき, $M^{(S^1)^n} \neq \emptyset$ ならば, $(M, (S^1)^n)$ はある非特異かつ完備なトーリック多様体と同変双正則である.

例 2.4 (Calabi-Eckmann 多様体). $(\mathbb{C}^k \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^m \setminus \{0\})$ への $(\mathbb{C}^*)^m$ -作用を,

$$(g_1, \dots, g_m) \cdot (z_1, \dots, z_m) := (g_1 z_1, \dots, g_m z_m)$$

で定める. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とし, 部分群 $H \subset (\mathbb{C}^*)^m$ を

$$H := \left\{ \underbrace{(e^t, \dots, e^t)}_k, \underbrace{(e^{\alpha t}, \dots, e^{\alpha t})}_{m-k} \in (\mathbb{C}^*)^m \mid t \in \mathbb{C} \right\}$$

で定義する. $(\mathbb{C}^k \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^m \setminus \{0\})$ への $(\mathbb{C}^*)^m$ -作用の H への制限は, 正則, プロパー, 自由であり, 従って軌道空間

$$M := (\mathbb{C}^k \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^m \setminus \{0\}) / H$$

は複素多様体になる. 奇数次元球面 S^{2k-1} と $S^{2m-2k-1}$ をそれぞれ \mathbb{C}^k と \mathbb{C}^{m-k} 中の単位球面と思うと, 包含写像 $S^{2k-1} \times S^{2m-2k-1} \hookrightarrow (\mathbb{C}^k \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^m \setminus \{0\})$ は $S^{2k-1} \times S^{2m-2k-1}$ と M の間の微分同相写像を誘導する. 特に M は複素閉多様体になる. M への $G = (S^1)^m$ -作用を

$$(g_1, \dots, g_m) \cdot [z_1, \dots, z_m] := [g_1 z_1, \dots, g_m z_m]$$

で定める. この G -作用は効果的で, かつ M の複素構造を保つ. M の点

$$x = [z_1, 0, \dots, 0, z_{k+1}, 0, \dots, 0], \quad z_1, z_{k+1} \neq 0$$

において, 固定部分群 G_x は

$$G_x = \{(g_1, \dots, g_m) \in (S^1)^m = G \mid g_1 = 1, g_m = 1\} \cong (S^1)^{m-2}$$

であるから, 特に x において等式 (3) が成り立つ.

より複雑で興味深い例として, Bosio と Meersseman による *LVMB manifold* ([2]), Panov と Ustinovsky による *moment-angle manifold* ([5]) などがある. これらは $\mathbb{C}P^m$ あるいは \mathbb{C}^m のある開集合を \mathbb{C}^ℓ による正則, プロパー, 自由な作用によって商をとることで得られ, その定義から自然なトーラス作用を持ち, そのトーラス作用が複素構造を保つこと, 極大であることを見るのは易しい.

3. 不変量

極大なトーラス作用付き複素閉多様体 (M, G) に対して, 2つの不変量を定義することができる. そのうちの1つはトーリック幾何と同様の手法で, G のリー環 \mathfrak{g} 中の有理扇が得られる. もう1つは G -作用の複素化を通して得られる複素部分空間 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ である. 以下, (M, G) は極大なトーラス作用付き複素閉多様体とする.

3.1. 有理扇 Δ

トーリック幾何においては, トーリック多様体 X に対して, 余次元1の部分多様体であってトーラス不変なもの (toric divisor) の交叉や固定している1次元部分トーラスを見る事によって, X を記述することができる. 我々の設定においてもこれと同様の議論ができる. そのために, toric divisor の代わりに役割を果たす特性部分多様体を定義する.

定義 3.1 (特性部分多様体). G のある 1 次元部分トーラス G_N による固定点集合の連結成分であって, 複素次元 1 の M の部分多様体 N のことを, **特性部分多様体** という.

M のコンパクト性から, 特性部分多様体は高々有限個であることが分かる. そこで, N_1, \dots, N_k を M の特性部分多様体とし, 抽象単体複体 Σ を

$$\Sigma := \left\{ I \subseteq \{1, \dots, k\} \mid \bigcap_{i \in I} N_i \neq \emptyset \right\}$$

と定める. また, 各 N_i の各点を固定している G の 1 次元部分トーラスを G_i として, パラメータ付け $\lambda_i : S^1 \rightarrow G_i$ であって,

$$(\lambda_i(g))_*(\xi) = g\xi, \quad \forall g \in S^1, \forall \xi \in TM|_{N_i}/TN_i$$

を満たすものを取る. このような λ_i は一意的に存在する. 微分を通して $\text{Hom}(S^1, G)$ を \mathfrak{g} の格子だと思ふことにすると, \mathfrak{g} のベクトル λ_i が各特性部分多様体に対して定義される. λ_i で張られる錐

$$\text{pos}(\lambda_i \mid i \in I) := \left\{ \sum_{i \in I} a_i \lambda_i \mid a_i \geq 0 \right\} \subset \mathfrak{g}$$

の族

$$\Delta := \{ \text{pos}(\lambda_i \mid i \in I) \mid I \in \Sigma \}$$

が得られる.

3.2. 複素部分空間 \mathfrak{h}

$G \cong (S^1)^m$ は M の複素構造を保つように作用し, かつ M はコンパクトであるので, G -作用の複素化と呼ばれる, M への正則な $G^{\mathbb{C}} \cong (\mathbb{C}^*)^m$ -作用が定義される. $G^{\mathbb{C}}$ の部分群 H を次で定める:

$$H := \{ h \in G^{\mathbb{C}} \mid h \cdot x = x, \quad \forall x \in M \}.$$

H は複素閉部分群であり, 従って $G^{\mathbb{C}}$ のリー部分群である.

\mathfrak{g} の錐の族 Δ , H のリー環 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ および G からなる組 $(\Delta, \mathfrak{h}, G)$ は, 明らかに (M, G) の不変量である. 組 $(\Delta, \mathfrak{h}, G)$ は次のように統制される:

命題 3.2. (M, G) から定まる組 $(\Delta, \mathfrak{h}, G)$ は次を満たす:

1. Δ は \mathfrak{g} の中で (格子 $\text{Hom}(S^1, G)$ に関して) 非特異な扇になる.
2. $p : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}$ を射影とする. このとき, 制限 $p|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{g}$ は単射である.
3. $q : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/p(\mathfrak{h})$ を商写像とする. このとき, Δ の q による像は $\mathfrak{g}/p(\mathfrak{h})$ の完備な扇になる.

4. 結果

極大なトーラス作用付き複素閉多様体の同変双正則類全体を, \mathcal{C}_1 で表す. また, 代表 (M, G) の同変双正則類を, $[M, G]$ で表すことにする. \mathcal{C}_2 を, 命題 3.2 を満たす組 $(\Delta, \mathfrak{h}, G)$ 全体の集合とする. 節 3 において構成した対応を $\mathcal{F}_1 : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ と書くことにする (\mathcal{F}_1 は明らかに well-defined である).

次の定理の 1 は, 講演者も独立に得ていたが, 論文準備中に Battisti によって先に発表, 出版された:

定理 4.1 (1 は Battisti, [1]). 1. $(\Delta, \mathfrak{h}, G) \in \mathcal{C}_2$ とする. Δ に対応するトーリック多様体を $X(\Delta)$ と書くことにする. このとき, $X(\Delta)/\exp(\mathfrak{h})$ は複素閉多様体になる.

2. G の $X(\Delta)/\exp(\mathfrak{h})$ への作用は極大. 特に $[X(\Delta)/\exp(\mathfrak{h}), G] \in \mathcal{C}_1$.

定理4.1より, $(\Delta, \mathfrak{h}, G) \in \mathcal{C}_2$ に対して $[X(\Delta)/\exp(\mathfrak{h}), G] \in \mathcal{C}_1$ を対応させる写像 $\mathcal{F}_2: \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ が得られる. 次が本講演の主定理である:

定理 4.2 (I.[4]). $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ は互いに逆写像である. 特に \mathcal{C}_1 と \mathcal{C}_2 の間に一対一対応がつく.

定理4.2の主張から, 極大トーラス付き複素閉多様体は, すべてあるトーリック多様体 $X(\Delta)$ の適当な連結な群 H による商空間と同変双正則になる, ということがわかる.

例 4.3 (コンパクト複素トーラス). M, G を例2.1と同様のものとする. 格子 Γ の生成元を $\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}$ とし, \mathbb{C} -線形写像 $f: \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}$ を, $f(\gamma_i \otimes 1) = \gamma_i, f(\gamma_i \otimes \sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\gamma_i$ で定める. f は全射であり, 全射準同型

$$\underline{f}: G^{\mathbb{C}} \rightarrow G = \mathbb{C}/\Gamma = M$$

に落ちる. 特に \underline{f} の核を H とすると, M は代数トーラス $G^{\mathbb{C}}$ の H による商空間と同変双正則同値である.

例 4.4 (非特異かつ完備なトーリック多様体). 例2.2と同様に, M を非特異かつ完備な複素 n 次元トーリック多様体とし, $G = (S^1)^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$ とする. 対応する \mathcal{C}_2 の元 $(\Delta, \mathfrak{h}, G) = \mathcal{F}_1([M, G])$ は定義より, Δ は完備かつ非特異な扇, \mathfrak{h} は $\{0\}$ となる. 逆に非特異かつ完備な \mathfrak{g} の中の扇 Δ に対して $(\Delta, \{0\}, G) \in \mathcal{C}_2$ であって $\mathcal{F}_2(\Delta, \{0\}, G) = [X(\Delta), G]$ となる. 特にトーリック多様体の基本定理は, 定理4.2の \mathfrak{h} が自明なものと理解することができる.

例 4.5 (Calabi-Eckmann 多様体). 例2.4の多様体 $M = (\mathbb{C}^k \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^{m-k} \setminus \{0\})/H$ は定理4.2を説明するのに都合がよい. M は m 個の特性部分多様体を持ち, それらは

$$N_i := \{[z_1, \dots, z_m] \in M \mid z_i = 0\}, \quad i = 1, \dots, m$$

と書ける. 各 N_i を固定する1次元部分トーラス G_i は i 番目の座標1次元部分トーラスであり, (M, G) に対応する扇 Δ は

$$\Delta = \{\text{pos}(e_i \mid i \in I \cup J) \mid I \subsetneq \{1, \dots, k\}, J \subsetneq \{k+1, \dots, m\}\}$$

となる. 従って対応するトーリック多様体 $X(\Delta)$ は $(\mathbb{C}^k \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}^{m-k} \setminus \{0\})$ である. M への $G = (S^1)^m$ -作用の複素化 $G^{\mathbb{C}} \times M \rightarrow M$ は

$$(g_1, \dots, g_m) \cdot [z_1, \dots, z_m] = [g_1 z_1, \dots, g_m z_m]$$

で与えられ, このことから M のすべての元を固定するものからなる $G^{\mathbb{C}}$ の部分群は H と一致することが分かる.

最後に, Δ と H のリー環 \mathfrak{h} が命題3.2を満足することを確認する. 簡単な計算により, $p(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^m$ はベクトル

$$v_1 = (\underbrace{1, \dots, 1}_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-k}),$$

$$v_2 = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, \underbrace{1, \dots, 1}_{m-k})$$

で張られることが分かる. 従って $\mathbb{R}^m/p(\mathfrak{h})$ と \mathbb{R}^{m-2} を

$$[x_1, \dots, x_m] \mapsto (x_1 - x_k, \dots, x_{k-1} - x_k, x_{k+1} - x_m, \dots, x_{m-1} - x_m)$$

で同一視することによって, $q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-2}$ による Δ の像は, $\mathbb{C}P^{k-1}$ と $\mathbb{C}P^{m-k-1}$ にの直積に対応する扇と等しいことが分かる. 特に, $q(\Delta)$ は \mathbb{R}^{m-2} の完備な扇になる.

定理4.2の“非同変”版もできる.

定理 4.6. $[M, G], [M', G'] \in \mathcal{C}_1$ とし, $\mathcal{F}_1([M, G]) = (\Delta, \mathfrak{h}, G)$, $\mathcal{F}_1([M', G']) = (\Delta', \mathfrak{h}', G')$ とする. このとき, 次は同値:

1. M, M' は双正則同値.
2. ある同型 $\alpha : G \rightarrow G'$ に関して, (M, G) と (M', G') は α -同変双正則同値.
3. ある同型 $\alpha : G \rightarrow G'$ であって,
 - 微分 $(d\alpha)_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ が扇 Δ と Δ' の間の同型を導く.
 - $(d\alpha)_1 \otimes \text{id}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$.

を満たすものが存在する.

参考文献

- [1] Laurent Battisti, *LVMB manifolds and quotient of toric varieties*, Math. Z. (2013).
- [2] Frédéric Bosio and Laurent Meersseman, *Real quadrics in \mathbb{C}^n , complex manifolds and convex polytopes*, Acta Math., **197** (2006), 53–127.
- [3] Hiroaki Ishida and Yael Karshon, *Completely integrable torus actions on complex manifolds with fixed points*, to appear in Math. Res. Lett., available at [arXiv:1203.0789](https://arxiv.org/abs/1203.0789).
- [4] Hiroaki Ishida, *Complex manifolds with maximal torus actions*, preprint, available at [arXiv:1302.0633](https://arxiv.org/abs/1302.0633).
- [5] Taras Panov and Yury Ustinovsky, *Complex-analytic structures on moment-angle manifolds*, Mosc. Math. J. **12** (2012), no. 1, 149–172.

Taub-NUT 変形の一般化

服部 広大

東京大学大学院数理科学研究科
日本学術振興会特別研究員 PD

1 概要

複素多様体上 X の非退化な正則 $(2, 0)$ 型閉微分形式 α を, 正則シンプレクティック構造といい, (X, α) を正則シンプレクティック多様体と呼ぶ. さらに, 正則シンプレクティック構造が平行となるようなリーマン計量 g が存在するとき, (X, g, α) を超ケーラー多様体という. このとき g はリッチ平坦ケーラー計量である. コンパクトな超ケーラー多様体の構成は極めて難しく, ごくわずかな例が知られているだけである. 一方で, 非コンパクトな超ケーラー多様体に関しては系統的な構成がいくつか知られており, その一つが超ケーラー商として構成する方法である.

非コンパクトなリーマン多様体の中で, 測地球の体積の増大度が同次元ユークリッド空間のそれと漸近的に等しく, 曲率の無限遠での挙動がしかるべき減衰条件を満たすものを ALE 空間という. 実 4 次元の ALE 超ケーラー多様体は, $H_2(X, \mathbb{Z})$ とその上の交叉行列によって完全に分類され, A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 型の Cartan 行列のいずれかに一致し, それらはすべて超ケーラー商として構成できることが Kronheimer によって示されている [4].

同様に, 曲率が無限遠で減衰し, 体積の増大度が 1 次元低いユークリッド空間と等しいものを ALF 空間といい, 実 4 次元では Taub-NUT 空間, multi-Taub-NUT 空間 (どちらも A 型 ALE 空間のいずれかと双正則同型) などがそれに分類される. これに対し, D 型の ALE 空間と微分同相であるような ALF 空間の例が Cherkis-Hitchin, Dancer, Auvray らによって構成されている. これらの中で, Dancer による構成は Kronheimer による超ケーラー商構成法を用いた手法と似ている. その違いは, 後者はユー

クリッド空間への線形な作用について超ケーラー商を考えているのに対し、前者は非平坦な超ケーラー多様体への群作用について超ケーラー商を考えるとこである。本講演では、Dancer による構成をさらに拡張し、ALE 超ケーラー多様体から別の超ケーラー多様体を構成する方法を説明する。また、新しくできた超ケーラー多様体が元の ALE 超ケーラー多様体と双正則同型であることを示した結果を紹介する。

2 Taub-NUT 変形の一般化

本講演では、2種類の超ケーラー多様体を考える。どちらも超ケーラー商として、以下のように構成する。

コンパクトリー群 H が、平坦な超ケーラー多様体 $M = \mathbb{H}^N$ に線形に作用しているとする。この作用に関する超ケーラー運動量写像を $\hat{\mu}: M \rightarrow \text{Im}\mathbb{H} \otimes \mathfrak{h}^*$ とおく。ただし、 $\text{Im}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^3$ は四元数体 \mathbb{H} の i, j, k で生成される実3次元部分空間であり、 \mathfrak{h}^* はリー環 $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$ の双対空間とする。さらに H 作用は M への正則な $H^{\mathbb{C}}$ 作用に自然に拡張していることに注意する。コンパクトリー群 G と、リー群の準同型 $\rho: H \rightarrow G \times G$ が与えられているとすると、 $H_\rho := \rho^{-1}(\Delta_G) \subset H$ は M に自然に作用する。ここで $\Delta_G \subset G \times G$ は対角集合からなる部分群とする。このとき、自然な単射 $\iota: H_\rho \rightarrow H$ は超ケーラー運動量写像 $\mu := \iota^* \circ \hat{\mu}$ を誘導する。 $Z_H \subset \mathfrak{h}^*$ によって H の \mathfrak{h}^* への余随伴作用による不変部分空間をあらわすものとする。各 $\zeta \in \text{Im}\mathbb{H} \otimes Z_H$ ごとに超ケーラー多様体 $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho$ が構成される。ただし、 $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho$ は一般には特異点を持つ可能性がある。本講演では、 $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho$ の Taub-NUT 変形を以下のように定める。

Kronheimer は [5] において、 $G \times G$ 不変な $N_G = T^*G^{\mathbb{C}}$ 上の完備超ケーラー構造を構成した。さらに、 $G \times G$ 作用に関する超ケーラー運動量写像が Dancer と Swann によって計算されている [2]。このとき H は $M \times N_G$ に ρ によって作用し、 $(x, p) \in M \times N_G$ に対して $\sigma(x, p) := \hat{\mu}(x) + \rho^*(\nu(p))$ とおくと、これが超ケーラー運動量写像となる。すると、もう一つ別の超ケーラー商 $\sigma^{-1}(\zeta)/H$ が各 $\zeta \in \text{Im}\mathbb{H} \otimes Z_H$ に対して定まる。これを $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho$ の Taub-NUT 変形と呼ぶことにする。もし両者が滑らかな多様体となれば、超ケーラー商の一般論からそれぞれの空間上に超ケーラー計量 $g^{\iota^*\zeta}, g^\zeta$ と正則シンプレクティック構造 $\alpha^{\iota^*\zeta}, \alpha^\zeta$ が定義される。さて、 ρ から自然に誘導される写像

$$\bar{\rho}: H/H_\rho \rightarrow (G \times G)/\Delta_G. \quad (1)$$

は定義より単射である.

定理 2.1. 上記の設定で, $\bar{\rho}$ を全射とする. このとき, 複素解析空間としての同型写像

$$\psi : \mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho \rightarrow \sigma^{-1}(\zeta)/H$$

が, 各 $\zeta \in Z_H$ に対して存在する. さらに, H_ρ が $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)$ に自由に作用するならば $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho$ と $\sigma^{-1}(\zeta)/H$ はともに滑らかな超ケーラー多様体であり, ψ は正則シンプレクティックとケーラー類を保つ双正則同型写像となる.

3 例

定理 2.1 は非常に広い例に対して適用できる. その中でも重要と思われるものは, $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho$ がトーリック超ケーラー多様体の場合と簾多様体の場合である. トーリック超ケーラー多様体の場合の Taub-NUT 変形は既に知られており, 変形前の体積の増大度がユークリッド的であるのに対し, 変形後の体積増大度はトーラスの実次元分だけ下がる. 特に, 実次元が 4 の場合のトーリック超ケーラー多様体に関する定理 2.1 は, [6] において示されている.

簾多様体の場合は未だ良く知られていない. $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho$ が D 型の ALE 空間の場合に上記の Taub-NUT 変形を適用すると D 型の ALF 計量が得られると信じられており, 実際に ζ に特別な条件を課せば $\sigma^{-1}(\zeta)/H$ が ALF 計量となることが確認できる. (ただし, この場合は特異点が現れる.)

同様に, $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho$ が generic な ζ に対し \mathbb{C}^2 上の k 点のヒルベルトスキームである場合, $\zeta = 0$ とすると $\mu^{-1}(\iota^*\zeta)/H_\rho$ は \mathbb{C}^2 の k 次対称積と等長になる. このときの Taub-NUT 変形は, Taub-NUT 空間の対称積と等長同型であることが確認できた.

参考文献

- [1] Dancer, A.S.: Dihedral singularities and gravitational instantons, *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 12, Issue 2, 77-91, (1993)
- [2] Dancer, A.S., Swann, A.: Hyperkähler metrics associated to compact Lie groups, *Math. Proc. Camb. Phil. So.*, 120, 61-69, (1996)

- [3] Hattori, K.: A generalization of Taub-NUT deformations, arXiv:1301.5424
- [4] Kronheimer, P.B.: The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *Journal of Diff. Geom.*, **29**, 665-683 (1989)
- [5] Kronheimer, P.B.: A hyperkahler structure on the cotangent bundle of a complex Lie group, arXiv:math/0409253
- [6] LeBrun, C.: Complete Ricci-flat Kähler metrics on \mathbb{C}^n need not be flat, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **52**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 297-304 (1991)

リッチ曲率と L^p 収束

本多正平 (九州大学 数理学研究院)

1 イントロダクション

本稿では [10] で得られた結果のみの紹介を目的とし、それらの詳細については講演で述べたい。

本講演で考える設定は次である： n を自然数， K を実数， $(M_i, m_i, \text{vol}/\text{vol } B_1(m_i))$ を点付き，正規化された測度付き n 次元完備リーマン多様体列で $\text{Ric}_{M_i} \geq K(n-1)$ を満たすとし， $(M_\infty, m_\infty, \nu)$ をそのグロモフ・ハウスドルフ極限とする。チーガー・コールディングの仕事 [2] によって，ある弱い意味で M_∞ の接束 TM_∞ とリーマン計量 $g_{M_\infty} = \langle \cdot, \cdot \rangle$ が自然に存在することがわかっている。その双対，テンソルを取ることによって，任意の非負整数 r, s に対して‘ベクトル束’

$$T_s^r M_\infty := \bigotimes_{i=1}^r TM_\infty \otimes \bigotimes_{i=r+1}^{r+s} T^* M_\infty$$

を考えることができる。これらもリーマン計量から定まる自然な計量を持つので，それも $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と書くことにする。これらの重要な性質の一つはラーデマハア型の定理がこの場合も成り立つことである： M_∞ 上の任意のリプシッツ関数 f に対して，その微分 $df(x) \in T_x^* M_\infty$ ， $\nabla f(x) \in T_x M_\infty$ がほとんど至る所の $x \in M_\infty$ で意味を持つ。

次に $R > 0, 1 < p < \infty$ と非負整数 r, s を固定し， $B_R(m_\infty)$ 上の $T_s^r M_\infty$ への L^p 切断全体を $L^p(T_s^r B_R(m_\infty))$ と書く。また，各 $i \leq \infty$ に対して， $T_i \in L^p(B_R(m_i))$ を取る。このとき，次を適切に定義したい：

(W) T_i が T_∞ に L^p 弱収束する。

(S) T_i が T_∞ に L^p 強収束する。

この定義を与えることの最大の難しさは，差 ' $T_i - T_\infty$ ' が適切に考えられないことである。実はこれと似たことは [6] でも扱っていたが，それは上の設定よりも強い状況であることは一言述べておきたい。

上の二つの定義を与えることができる，それが本講演で最も述べたいことである：

本研究は科学研究費若手研究 (B) 24740046 の助成を受けたものである。

定義 1.1 ([10]).

(W) T_i が T_∞ に $B_R(m_\infty)$ 上 L^p 弱収束するとは次が成り立つときを言う： $\sup_i \|T_i\|_{L^p} < \infty$ であり，任意の $x_\infty \in B_R(m_\infty)$ ，任意の $\{z_i\}_{1 \leq i \leq r+s} \subset M_\infty$ ，そして $B_r(x_\infty) \subset B_R(m_\infty)$ となる任意の $r > 0$ に対して

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B_r(x_j)} \left\langle T_j, \bigotimes_{i=1}^r \nabla r_{z_{i,j}} \otimes \bigotimes_{i=r+1}^{r+s} dr_{z_{i,j}} \right\rangle d\text{vol} = \int_{B_r(x_\infty)} \left\langle T_\infty, \bigotimes_{i=1}^r \nabla r_{z_i} \otimes \bigotimes_{i=r+1}^{r+s} dr_{z_i} \right\rangle dv$$

が成り立つ．ここに， $x_j \rightarrow x_\infty$ ， $z_{i,j} \rightarrow z_i (j \rightarrow \infty)$ で， r_z は z からの距離関数である．

(S) T_i が T_∞ に $B_R(m_\infty)$ 上 L^p 強収束するとは次が成り立つときを言う： T_i が T_∞ に $B_R(m_\infty)$ 上 L^p 弱収束し，かつ $\limsup_{i \rightarrow \infty} \|T_i\|_{L^p(B_R(m_i))} \leq \|T_\infty\|_{L^p(B_R(m_\infty))}$ が成り立つ．

上で， $p \neq 1, \infty$ としているのはクラークソンの不等式 [3] と関係がある．このように定義すると期待されるべき性質が成り立つ．例えば次が言える：

1. この定義は空間を止めたとき，すなわち $(M_i, m_i, \text{vol}/\text{vol } B_1(m_i)) \equiv (M_\infty, m_\infty, \nu)$ のときは通常のも的一致する．
2. L^p 有界列は L^p 弱収束部分列を持つ．
3. L^p 弱収束列において，その L^p ノルムは下半連続である．

この概念を用いた応用を以下に述べる．チーガーの仕事 [1] によって， $B_R(m_\infty)$ 上のソボレフ空間 $H_{1,p}(B_R(m_\infty))$ が well-defined であることが知られている．次のレーリッヒ型のコンパクト性定理が応用の一つである：

定理 1.2. [10] 各 $i < \infty$ に対して $f_i \in H_{1,p}(B_R(m_i))$ を一つ取って， $\sup_{i < \infty} \|f_i\|_{H_{1,p}} < \infty$ と仮定する．このとき， $f_\infty \in H_{1,p}(B_R(m_\infty))$ と部分列 $\{i(j)\}_j$ があって次が成り立つ：

1. $f_{i(j)}$ は f_∞ に $B_R(m_\infty)$ 上 L^p 強収束する．
2. $\nabla f_{i(j)}$ は ∇f_∞ に $B_R(m_\infty)$ 上 L^p 弱収束する．

このレーリッヒ型のコンパクト性定理を用いると，[5] で予想された深谷予想（グロモフ・ハウスドルフ収束に伴う，ラプラシアン固有値の連続性に関する予想で，チーガー・コールディングによって [2] で解かれた）の簡単な別証を与えることができる．また，上記定理は p ラプラシアンの連続性への応用も持つが，それは最後に述べる．

一方 [8] で， M_∞ にはある弱い意味で二階微分可能構造が入り，その二階微分可能構造に関してリーマン計量は微分可能で，特にレヴィ・チビタ接続が一意的に存在することがわかっている．従ってその上の二階微分可能関数や，そのヘッシアンといったことを考えることができる ([9] もご参考にしていただければ幸いです)．

この二階微分可能構造に関して次の応用がある．それはヘッシアンの L^2 弱収束性である：

定理 1.3. [10] 各 $i \leq \infty$ に対して $f_i \in L^2(B_R(m_i))$ を取り, 次を仮定する: 任意の $i < \infty$ に対して $f_i \in C^2(B_R(m_i))$ であり, $\sup_{i < \infty} (\|f_i\|_{H_{1,2}(B_R(m_i))} + \|\Delta f_i\|_{L^2(B_R(m_i))}) < \infty$ かつ, f_i は f_∞ に $B_R(m_\infty)$ 上で L^2 弱収束している. このとき, n, K, R にのみ依存する $p_1 := p_1(n, K, R) > 1$ があって, 任意の $r < R$ に対して以下が成り立つ:

1. f_i は f_∞ に $B_R(m_\infty)$ 上 L^2 強収束する.
2. $f_\infty \in H_{1,2p_1}(B_r(m_\infty))$.
3. f_i と ∇f_i はそれぞれ f_∞ と ∇f_∞ に $B_r(m_\infty)$ 上 L^{2p_1} 強収束する.
4. $|\nabla f_\infty|^2 \in H_{1,p_1}(B_r(m_\infty))$.
5. $\nabla|\nabla f_i|^2$ は $\nabla|\nabla f_\infty|^2$ に $B_r(m_\infty)$ 上 L^{p_1} 弱収束する.
6. Δf_i は $\Delta^v f_\infty$ に $B_R(m_\infty)$ 上 L^2 弱収束する. ここに Δ^v は ($B_R(m_\infty)$ 上のディリクレ) ラプラシアンである.
7. f_∞ は $B_R(m_\infty)$ 上で二階微分可能である.
8. Hess_{f_i} は Hess_{f_∞} に $B_r(m_\infty)$ 上 L^2 弱収束する.

これを用いると次のボホナー型不等式が得られる:

定理 1.4. [10] $\{f_i\}_{i \leq \infty}$ を定理 1.3 と同じものとし, さらに次を仮定する: 任意の $r < R$ に対して Δf_i は $\Delta^v f_\infty$ に $B_r(m_\infty)$ 上 L^2 強収束する. このとき,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{B_R(m_\infty)} \langle d\phi_\infty, d|df_\infty|^2 \rangle dv &\geq \int_{B_R(m_\infty)} \phi_\infty |\text{Hess}_{f_\infty}|^2 dv \\ &\quad + \int_{B_R(m_\infty)} (-\phi_\infty (\Delta^v f_\infty)^2 + \Delta^v f_\infty \langle d\phi_\infty, df_\infty \rangle) dv \\ &\quad + K(n-1) \int_{B_R(m_\infty)} \phi_\infty |df_\infty|^2 dv \end{aligned}$$

が $B_R(m_\infty)$ 上で定義されたコンパクトサポートを持つ任意の非負値リプシッツ関数 ϕ_∞ に対して成り立つ.

このボホナー型不等式の重要な点はヘッシアンの項が生きていることと, ‘何らかの意味で $\text{Ric}_{M_\infty} \geq K(n-1)$ ’ となっている (すなわちリッチ曲率の下限はグロモフ・ハウドルフ位相で保たれる) ことを意味している点である. ちなみに, ヘッシアンの項をラプラシアンに置き換えた弱い形での主張はこれまで知られていた. 上のような f_∞ の例は非常に多く, 例えば $B_R(m_\infty)$ 上のディリクレ問題の固有関数がそうなる. 特に $L^2(B_R(m_\infty))$ 内の稠密な部分空間上で上記不等式が成り立つ. また, これらを用いると M_∞ 上の (ディ

リクレ) ラプラシアン, 二階微分可能構造を用いた座標表示が非崩壊極限の場合に可能となる (が, そのことについてはここではこれ以上触れない).

次に, 典型的なテンソル場である M_i のリーマン計量 g_{M_i} がグロモフ・ハウスドルフ収束に伴ってどのような振る舞いをしているのかを述べる:

定理 1.5. [10] 任意の $\hat{R} > 0$ と任意の $1 < \hat{p} < \infty$ に対して, g_{M_i} は g_{M_∞} に $B_{\hat{R}}(m_\infty)$ 上 $L^{\hat{p}}$ 弱収束する. さらに次の三条件は同値である:

1. 任意の $\hat{R} > 0$ と, 任意の $1 < \hat{p} < \infty$ に対して, g_{M_i} は g_{M_∞} に $B_{\hat{R}}(m_\infty)$ 上 $L^{\hat{p}}$ 強収束する.
2. ある $\hat{R} > 0$ と, ある $1 < \hat{p} < \infty$ に対して, g_{M_i} は g_{M_∞} に $B_{\hat{R}}(m_\infty)$ 上 $L^{\hat{p}}$ 弱収束する.
3. M_∞ は非崩壊極限である.

この定理はグロモフ・ハウスドルフ収束と, リーマン計量の収束の間の新しい関係を与えている点で重要である. この定理の系として, 最近コールディング・ネイバーによって [4] で定義された多様体の極限空間の次元と呼ばれる量のグロモフ・ハウスドルフ位相に関する下半連続性が得られる. 特に M_∞ の任意の接錐 X (ある点での接空間と呼ぶべきもの) について, その次元について

$$\dim X \leq \dim M_\infty$$

という関係が成り立つことが得られる. この不等式で等号が成り立たない例がチーガー・コールディングによって知られているので, この不等式はシャープである.

最後に, p ラプラシアンへの応用を述べて本稿を終えたい. $d > 0$ に対して, $\mathcal{M}(n, d, K)$ で, 直径が d 以下, リッチ曲率が $K(n-1)$ 以上の n 次元コンパクトリーマン多様体とその上の自然な確率測度の組 $(M, \text{vol}/\text{vol } M)$ 全体とする. また, $\overline{\mathcal{M}(n, d, K)}$ でそのグロモフ・ハウスドルフコンパクト化とする. 今, $1 < p < \infty$ と $(X, \nu) \in \overline{\mathcal{M}(n, d, K)}$ に対して, もし X が一点でなければ

$$\lambda_{1,p}(X) := \inf \left\{ \frac{\|\nabla f\|_{L^p(X)}^p}{\|f\|_{L^p(X)}^p}; f \in H_{1,p}(X), f \neq 0, \int_X |f|^{p-2} f d\nu = 0 \right\} > 0$$

と置き, もし X が一点のときは $\lambda_{1,p}(X) := \infty$ と置く. 次は良く知られている: もし $(X, \nu) \in \mathcal{M}(n, d, K)$ ならば, $\lambda_{1,p}(X)$ は p ラプラシアンの正の第一固有値と一致する.

定理 1.6. [10] $\lambda_{1,*} : (1, \infty) \times \overline{\mathcal{M}(n, d, K)} \rightarrow (0, \infty]$ は連続である.

この主張を $p = 2$ で切った主張はすでに知られている [5]. これと, コンパクト空間上の連続関数は最大値, 最小値を持つ, という事実を合わせると次が得られる:

系 1.7. 任意の $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$, 任意の $n \in \mathbf{N}$, 任意の $K \in \mathbf{R}$ に対して, 正の実数 $C_i := C_i(p_1, p_2, n, K) (i = 1, 2)$ が存在して, 以下が成り立つ:

$$(\text{diam } M)^2 \text{Ric}_M \geq (n - 1)K$$

を満たす任意の n 次元コンパクトリーマン多様体 M と, 任意の $p_1 \leq p \leq p_2$ に対して,

$$0 < C_1 \leq \lambda_{1,p}(M)(\text{diam } M)^p \leq C_2 < \infty$$

が成り立つ.

References

- [1] J. CHEEGER, Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, *Geom. Funct. Anal.* 9 (1999), 428-517.
- [2] J. CHEEGER AND T. H. COLDING, On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below, III, *J. Differential Geom.* 54 (2000), 37-74.
- [3] J. A. CLARKSON, Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 40 (1936), 396-414.
- [4] T. H. COLDING AND A. NABER, Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications, *Ann. of Math.* 176 (2012), 1173-1229.
- [5] K. FUKAYA, Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of the laplace operator, *Invent. Math.* 87 (1987), 517-547.
- [6] S. HONDA, Ricci curvature and convergence of Lipschitz functions, *Commun. Anal. Geom.* 19 (2011), 79-158.
- [7] 本多正平, 非負曲率多様体上の調和関数とグロモフ・ハウスドルフ収束, 第 57 回幾何学シンポジウム講演アブストラクト.
- [8] S. HONDA, A weakly second order differential structure on rectifiable metric measure spaces, arXiv:1112.0099.
- [9] 本多正平, 多様体の崩壊極限における二階微分可能構造と Levi-Civita 接続の一意的な存在について, 第 59 回幾何学シンポジウム講演アブストラクト.
- [10] S. HONDA, Ricci curvature and L^p -convergence, arXiv:1212.2052, *Crelle*, to appear.

Type-changing PDE and singularities of Monge characteristic systems

渋谷 一博 (広島大学大学院理学研究科)

本講演の内容は野田尚廣氏 (名古屋大学/OCAMI) との共同研究に基づく.

Cartan, Goursat, Lie らの時代より微分方程式の幾何学的研究 (変数変換に関する微分方程式の分類, 解の存在非存在, 解の構成法など) が行われてきている. その後, それらの研究は微分式系, 階別リ一環の理論などを用いて定式化された. 正則と呼ばれる微分方程式のクラスには対応する微分式系が必ず存在して, その微分式系が持つ性質に講演者は興味を持っている. 今回は特に 2 独立変数 1 未知関数 2 階の単独型偏微分方程式の中で type-changing 方程式と呼ばれる微分方程式に対して得られた結果を報告する.

2 独立変数 1 未知関数 2 階の単独型偏微分方程式は双曲型, 放物型, 楕円型に分類されるが type-changing 方程式とは局所的に放物型のまわりに双曲型, 楕円型が混在する方程式である. type-changing 方程式は曲面論等の研究の際にも表れる重要なクラスの微分方程式である. 以前に野田尚廣氏との共同研究 [NS] において, ある種の正則性を仮定したクラスの type-changing 方程式に対して 2 独立変数 1 未知関数 2 階の過剰決定系の理論を用いた分類問題を扱った. それに対し, 同様の正則性を仮定したクラスの type-changing 方程式に対する Monge 特性系 (単独型偏微分方程式の理論の中で重要な不変量) の振る舞いを研究し, その Monge 特性系の退化現象を明らかにした. そして, その退化現象と以前の過剰決定系の理論を用いた研究の退化現象が完全に対応することを明らかにすることに成功した ([主定理 3]).

1 微分式系, Jet space と 2 独立変数 1 未知関数 2 階単独型偏微分方程式

多様体 R とその接束 TR の部分束 D の組を微分式系と呼び (R, D) と表すこととする.

例 1 $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ を 2-jet space とする. すなわち, 8 次元多様体

$$J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \{(x, y, z, p, q, r, s, t)\}$$

とその接空間の部分束 (canonical differential system) $C^2 = \{\varpi_0 = \varpi_1 = \varpi_2 = 0\} \subset T(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ の組を考える. ここで

$$\varpi_0 = dz - pdx - qdy, \quad \varpi_1 = dp - rdx - sdy, \quad \varpi_2 = dq - sdx - tdy.$$

この $(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), C^2)$ は 8 次元多様体上の階数 5 の微分式系である.

次に上記の例 1 の 2-jet space を用いて微分方程式と微分式系の対応を与える. 2 独立変数 1 未知関数 2 階単独型偏微分方程式

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1}$$

を考える. ここで

$$z = z(x, y), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

また (1) が正則であるとは “ $(F_r, F_s, F_t) \neq (0, 0, 0)$ ” を満たすこととする (以降は正則な微分方程式のみを考える). 偏微分方程式 $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ に対し, $\Sigma := \{F = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ と

し, C^2 の Σ への制限 $D = \{\iota^*\varpi_0 = \iota^*\varpi_1 = \iota^*\varpi_2 = 0\} \subset T\Sigma$ を考える ($\iota: \Sigma \rightarrow J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: inclusion). この (Σ, D) を偏微分方程式 (1) に対応する微分式系と呼ぶ. このとき偏微分方程式 $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ の解は微分式系 (Σ, D) の 2次元積分多様体として捉えられる.

注意 一般に $\Sigma = \{F = 0\}$ は jet space 中の部分多様体になるとは限らない. また Σ が多様体であっても C^2 の Σ への制限 D は部分束になるとは限らない. しかし, 正則条件の下では $\Sigma = \{F = 0\}$ は余次元 1 の部分多様体であり, C^2 の Σ への制限 D は rank 4 の部分束になり, Σ から $J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ への射影は submersion になる.

2 Type-changing 方程式

Type-changing 方程式は 2 独立変数 1 未知関数 2 階単独型偏微分方程式 (1) 中の特別な方程式である. 偏微分方程式 (1) は判別式

$$\Delta := F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2$$

が正, 0, 負かにより楕円型, 放物型, 双曲型に分類される. 型の分類は対応する微分式系を用いると次のように記述されることが知られている:

定理 1(Cartan) 正則な微分方程式 (1) に対し対応する微分式系を (Σ, D) とする.

1. $w \in \Sigma$ で双曲型 (すなわち $\Delta(w) < 0$) \iff 次を満たす $w \in \Sigma$ の周りの局所 coframe $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2\}$ が存在する: $D = \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0\}$ かつ

$$d\theta_0 \equiv 0, \quad d\theta_1 \equiv \eta_1 \wedge \pi_1, \quad d\theta_2 \equiv \eta_2 \wedge \pi_2, \quad \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2.$$

2. $w \in \Sigma$ で放物型 (すなわち $\Delta(w) = 0$) \iff 次を満たす $w \in \Sigma$ の周りの局所 coframe $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2\}$ が存在する: $D = \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0\}$ かつ点 w において

$$d\theta_0 \equiv 0, \quad d\theta_1 \equiv \eta_1 \wedge \pi_1, \quad d\theta_2 \equiv \eta_1 \wedge \pi_2 + \eta_2 \wedge \pi_1, \quad \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2.$$

3. $w \in \Sigma$ で楕円型 (すなわち $\Delta(w) > 0$) \iff 次を満たす $w \in \Sigma$ の周りの局所 coframe $\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2\}$ が存在する: $D = \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0\}$ かつ

$$d\theta_0 \equiv 0, \quad d\theta_1 \equiv \eta_1 \wedge \pi_1 + \eta_2 \wedge \pi_2, \quad d\theta_2 \equiv \eta_1 \wedge \pi_2 - \eta_2 \wedge \pi_1, \quad \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2.$$

上の定理を用いると放物型の方程式に対して Monge 特性系 (rank 2 の部分束) が次のように定義される:

$$M := \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \eta_1 = \pi_1 = 0\} \subset T\Sigma.$$

Monge 特性系は微分式系 (Σ, D) の不変量である.

注意 放物型に対しては Monge 特性系 M がひとつ定義されたが, 双曲型に対しては Monge 特性系 M_1, M_2 が二つ定義され, 楕円型に対しては Monge 特性系は定義されない.

さて, 偏微分方程式 (1) に対し対応する微分式系を (Σ, D) とし次の放物点全体から成る部分集合 Σ_p を考える:

$$\Sigma_p := \{F = \Delta = 0\} \subset \Sigma = \{F = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

ここで $\Delta := F_r F_t - \frac{1}{4} F_s^2$. このとき定義からすぐに次のことが分かる:

$$\begin{aligned}\Sigma_p &= \emptyset \iff \text{双曲 or 楕円} \\ \Sigma_p &= \Sigma \iff \text{放物}\end{aligned}$$

これに対し type-changing 方程式を次のように定義する.

定義 2 独立変数 1 未知関数 2 階単独型正則偏微分方程式 (1) $F = 0$ が type-changing であるとは対応する Σ_p が真部分集合であることとする. ($\emptyset \subset \Sigma_p \subset \Sigma$)

一般に Σ_p はただの部分集合であるが $\Sigma_p \subset \Sigma^7$ が部分多様体であると仮定すると Type-changing は次の class に分けられる:

- $\dim \Sigma_p = 6$ のとき
 1. Σ_p の両側が双曲
 2. Σ_p の両側が楕円
 3. Σ_p の片側が双曲でもう片方が楕円
- $\dim \Sigma_p \leq 5$ のとき
 1. Σ_p の周りは双曲
 2. Σ_p の周りは楕円

注意 各クラスに例は存在する ([NS]).

本講演に於いては部分多様体論、微分式系の理論を用いるために自然な次を仮定したクラスを考える.

仮定 2 独立変数 1 未知関数 2 階単独型正則偏微分方程式 (1) $F = 0$ に対応する

$$\Sigma_p := \{F = \Delta = 0\} \subset \Sigma^7 := \{F = 0\}$$

が余次元 1 の部分多様体となる.(正確にはより強く, $(F_r, F_s, F_t), (\Delta_r, \Delta_s, \Delta_t)$ が一次独立を仮定する.)

注意 上の仮定の下では Σ_p の片側が双曲でもう片方が楕円の $\dim \Sigma_p = 6$ の 3 の case になる.

例 2 $F = r - 2st + \frac{2}{3}t^3 = 0$ を考えると判別式は $\Delta = -2s + t^2$ であり対応する Σ_p は

$$\Sigma_p = \left\{ r = 2st - \frac{2}{3}t^3, s = \frac{t^2}{2} \right\} = \left\{ r = \frac{t^3}{3}, s = \frac{t^2}{2} \right\}$$

であるので仮定を満たす type-changing 方程式である.

3 Type-changing 方程式と過剰決定系

例 2 に出てきた $\Sigma_p = \{r = \frac{t^3}{3}, s = \frac{t^2}{2}\}$ は “Cartan の過剰決定系” と呼ばれる有名な過剰決定系偏微分方程式であり type-changing 方程式と過剰決定系の理論の相性の良さが示唆されている. そこで一般の 2 独立変数 1 未知関数 2 階過剰決定系の理論を簡単に復習する.

2 独立変数 1 未知関数 2 階過剰決定系

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad G(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad (2)$$

を考える. また (2) は (F_r, F_s, F_t) と (G_r, G_s, G_t) が一次独立のとき正則という (以後は正則な方程式のみを考える). 単独方程式の時と同様に 2-jet space を介して (2) に次のように微分式系 (R, E) を対応させる:

$$R := \{F = G = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad E := C^2|_R.$$

このとき正則性の仮定より $\dim R = 6$, $\text{rank } E = 3$.

単独方程式は双曲、放物、楕円の 3 つの type に分けられたが過剰決定系は次の 4 つの type に分けられる.

定理 2(Cartan, Noda-S-Yamaguchi)

過剰決定系 $R = \{F = G = 0\}$ の標準形は次の 4 つに分類される:

$(E = \{\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = 0\}, \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2, \pi\} : \text{coframe})$

(0)-type

$$\begin{cases} d\theta_0 & \equiv \omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 & \text{mod } \theta_0 \\ d\theta_1 & \equiv \omega_1 \wedge \omega_2 & \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2 \\ d\theta_2 & \equiv \omega_2 \wedge \pi & \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

(i)-type

$$\begin{cases} d\theta_0 & \equiv \omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 & \text{mod } \theta_0 \\ d\theta_1 & \equiv 0 & \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2 \\ d\theta_2 & \equiv \omega_2 \wedge \pi & \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

(ii)-type

$$\begin{cases} d\theta_0 & \equiv \omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 & \text{mod } \theta_0 \\ d\theta_1 & \equiv \omega_2 \wedge \pi & \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2 \\ d\theta_2 & \equiv \omega_1 \wedge \pi & \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

(iii)-type

$$\begin{cases} d\theta_0 & \equiv \omega_1 \wedge \theta_1 + \omega_2 \wedge \theta_2 & \text{mod } \theta_0 \\ d\theta_1 & \equiv \omega_1 \wedge \pi & \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2 \\ d\theta_2 & \equiv \omega_2 \wedge \pi & \text{mod } \theta_0, \theta_1, \theta_2 \end{cases}$$

4 主定理

仮定を満たす type-changing 方程式に対して $F = \Delta = 0$ を考えるとそれは正則過剰決定系となる. このとき $(\Sigma_p = \{F = \Delta = 0\}, D_p := C^2|_{\Sigma_p})$ を対応する微分式系とすると

主定理 1 (Σ_p, D_p) は (iii)-type にはならない.

さらに次の判定法が得られる:

主定理 2 仮定を満たす type-changing 方程式が

$$r = f(x, y, z, p, q, s, t)$$

と表されているとき,

$$\begin{aligned} \text{(ii)-type} &\iff f_s \Delta_s + 2\Delta_t \neq 0. \\ \text{(0)-type} &\iff f_s \Delta_s + 2\Delta_t = 0, \quad 2\frac{df}{dy} \Delta_s - f_s \frac{d\Delta}{dy} + 2\frac{d\Delta}{dx} \neq 0. \\ \text{(i)-type} &\iff f_s \Delta_s + 2\Delta_t = 0, \quad 2\frac{df}{dy} \Delta_s - f_s \frac{d\Delta}{dy} + 2\frac{d\Delta}{dx} = 0. \end{aligned}$$

注意 主定理 2 の仮定 “ $r = f(x, y, z, p, q, s, t)$ と表されている” は本質的ではない. すなわち type-changing 方程式 $F = 0$ は接触変換と陰関数定理により理論的にはいつでも $r = f(x, y, z, p, q, s, t)$ の形に表すことが出来る.

次に type-changing 方程式の Monge 特性系を定義する:
 $F = 0$ を仮定を満たす type-changing 方程式とする (単独方程式として (Σ, D) が対応). このとき Σ_p は放物点の集合なので各点ごとの放物型の Monge 特性系の引き戻しを考慮して、それを type-changing 方程式の Monge 特性系を定義する. すなわち

$$M_p := \{\iota^* \theta_0 = \iota^* \theta_1 = \iota^* \theta_2 = \iota^* \eta_1 = \iota^* \pi_1 = 0\} \subset T\Sigma_p$$

ここで $\iota: \Sigma_p \rightarrow \Sigma$ は inclusion.

一般に M_p は部分束になるとは限らない. 実際には generic には $\dim M_p = 1$ (定義 1-form の独立性が保たれる) だが退化して $\dim M_p = 2$ になることがある ($\dim M_p \geq 3$ になることはない). そして、その退化の様子は次のように過剰決定系としての分類と対応する:

主定理 3 仮定を満たす type-changing 方程式の Monge 特性系と過剰決定系としての構造の対応は次で与えられる:

$$\begin{aligned} \dim M_p = 1 &\iff \text{(ii)-type or (0)-type} \\ \dim M_p = 2 &\iff \text{(i)-type} \end{aligned}$$

参考文献

- [BCG3] R. Bryant, S. S. Chern, R. Gardner, H. Goldschmidt, P. Griffiths, Exterior Differential Systems, MSRI Publ. vol. **18**, Springer Verlag, Berlin (1991).
[C] E. Cartan, Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre, Ann. École Normale, **27** (1910), 109–192.
[NS] T. Noda, K. Shibuya, Second order type-changing PDE for a scalar function on a plane, Osaka J. Math. 49 (2012), no 1, 101-124
[Y1] K. Yamaguchi, Contact geometry of higher order, Japan. J. Math., **8** (1982), 109–176.
[Y2] K. Yamaguchi, Geometrization of jet bundles, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 27–40.

距離空間の局所リプシッツ可縮性と 整数係数カレントのホモロジー

三石 史人 (東北大学 理学研究科 学振 PD)

1 序

本稿及び本講演では, 最近得た以下の定理の主張と証明を解説します.

定理 1.1 ([M]). X を弱局所リプシッツ可縮な距離空間とする. その時, 三つのホモロジー

$$H_*(X), H_*^L(X), H_*^{IC}(X)$$

は, 自然に同型である.

ここで, $H_*(X)$ は X の特異ホモロジー, $H_*^L(X)$ は X の特異リプシッツホモロジー, $H_*^{IC}(X)$ は X のコンパクト台を持つ整数係数カレントの鎖複体のホモロジーを表します. 3節と4節で, これらの正確な定義を与えます. また5節では, 証明で使った代数トポロジーの余層 (cosheaf) の理論を紹介します.

2 局所リプシッツ可縮性

定理 1.1 の仮定を説明します.

定義 2.1 ([M]). 距離空間 X が弱局所リプシッツ可縮 (weakly locally Lipschitz contractible, 略して WLLC) とは, 次の性質を満たす時を言う. 任意の $x \in X$ と任意の開集合 $V \subset X$ で $x \in V$ なるものに対し, ある開集合 $U \subset X$ で $x \in U \subset V$ かつ, U から V への包含写像 $U \hookrightarrow V$ がある定置写像 $U \rightarrow \{*\} \subset V$ にリプシッツにホモトピックとなるものが存在する. すなわち, あるリプシッツ写像

$$h : U \times [0, 1] \rightarrow V$$

とある点 $y \in V$ が存在して, 任意の $z \in U$ に対して,

$$h(z, 0) = z, \quad h(z, 1) = y$$

を満たす.

注意 2.2. 「弱」とついていない「局所リプシッツ可縮性 (略して LLC)」という性質を 1997 年に山口氏が論文 [Y] の中で導入し, 「 X が LLC ならば, 自然に $H_*(X) \cong H_*^L(X)$ 」を証明しています. また, 「強局所リプシッツ可縮性 (略して SLLC)」という性質を最近の山口氏との共同研究 [MY] の中で導入しました. 名前の通り,

$$\text{SLLC} \Rightarrow \text{LLC} \Rightarrow \text{WLLC}$$

が成立します. 2009 年に [RS] の中で, Riedweg と Sch\"apfi が局所リプシッツ可縮性に似た “a metric space admits locally strong Lipschitz contractions” という性質を導入し, (鎖複体のレベルで) 自然変換 $H_*^L \rightarrow H_*^{IC}$ を定義しました. 彼らの主定理は, “if X admits locally strong Lipschitz contractions, then $H_*(X) \cong H_*^L(X) \cong H_*^{IC}(X)$ naturally” というものです. また,

$$X \text{ admits locally strong Lipschitz contractions} \Rightarrow X \text{ is WLLC}$$

が成り立ちます. よって, 定理 1.1 は, 山口氏と Riedweg-Sch\"apfi の結果の拡張になっています. また定理 1.1 の証明は, 代数トポロジーの「余層 (cosheaf) の理論」を用いて統一的行われます.

弱局所リプシッツ可縮であるような距離空間は多くあります.

例 2.3. 次の (1)~(6) の距離空間は強局所リプシッツ可縮で, (7), (8) は弱局所リプシッツ可縮である:

- (1) ノルム空間,
- (2) リーマン多様体,
- (3) CAT 空間 (=“断面曲率が上に有界”な測地空間),
- (4) 測地距離を持つグラフ (ただし, 辺の長さの下限がある),
- (5) 有限次元アレクサンドロフ空間 (=“断面曲率が下に有界”な測地空間) ([MY]),

- (6) (1)~(5) の空間の (適切な意味での) 凸集合 (しばしば閉を仮定する),
- (7) 弱局所リプシッツ可縮空間の開集合,
- (8) 弱局所リプシッツ可縮空間に局所的に双リプシッツ同相な距離空間.

3 特異 (リプシッツ) ホモロジー

特異 (リプシッツ) ホモロジーの定義を復習します. 整数 $k \geq 0$ に対し, $\Delta^k = [e_0, \dots, e_k]$ を正 k 単体とします. Δ^k はユークリッド空間の凸集合として, 距離空間とします. よって, 距離空間 X に対して,

$$\text{Lip}(\Delta^k, X) \subset C(\Delta^k, X)$$

となります. ここで, $C(Z, W)$ は Z から W への連続写像全体の集合, $\text{Lip}(Z, W)$ は Z から W へのリプシッツ写像全体の集合を表します. これらで生成される自由アーベル群をそれぞれ,

$$S_k^L(X) = \mathbb{Z} \text{Lip}(\Delta^k, X), \quad S_k(X) = \mathbb{Z} C(\Delta^k, X)$$

と書くことにします. 各写像 $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ に対し, その境界 $b\sigma$ を

$$b\sigma = \sum_{j=0}^k (-1)^j \sigma|_{[e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_k]}$$

と定めれば, $b \circ b = 0$ を満たします. これを \mathbb{Z} 線形拡大したものを考えます. もし, $c \in S_k(X)$ ならば, $bc \in S_{k-1}(X)$ となり, $c \in S_k^L(X)$ ならば, $bc \in S_{k-1}^L(X)$ となります. ただし, $c \in S_0(X)$ に対し, $bc = 0$ と定めます. この様にして, $(S_*^L(X), b)$ は $(S_*(X), b)$ の部分鎖複体になります. それらのホモロジーを

$$H_*(X) := H_*(S_*(X)), \quad H_*^L(X) := H_*(S_*^L(X))$$

と書き, それぞれ特異ホモロジー, 特異リプシッツホモロジーと呼びます.

定理 1.1 の半分は, もし X が WLLC ならば, 包含写像 $S_*^L(X) \hookrightarrow S_*(X)$ が誘導するホモロジーの間の写像

$$H_*^L(X) \rightarrow H_*(X)$$

が同型である事を主張しています.

4 距離空間のカレント

古典的には、カレントとは、微分可能多様体上の微分形式の成す線形空間の連続線形汎関数であり、1950年代に De Rham によって導入されたものです。Ambrosio と Kirchheim は、2000年の論文 [AK] の中で、距離空間の中のカレント (currents in metric spaces) を定義し基本的な性質を調べました。その定義は、やはり距離空間上の“微分形式に相当するもの”の空間の双対の元として定式化されます。以下で、[AK] のカレントの定義といくつかの性質を復習します。

4.1 距離空間のカレント

距離空間 X と整数 $k \geq 0$ を固定します。

$$\text{Lip}(X) := \text{Lip}(X, \mathbb{R}), \quad \text{Lip}_b(X) := \{f \in \text{Lip}(X) \mid f \text{ is bounded}\}$$

とおきます。 X 上の “ k 形式” の空間を

$$\mathcal{D}^k(X) = \text{Lip}_b(X) \times \underbrace{\text{Lip}(X) \times \cdots \times \text{Lip}(X)}_{k \text{ 個}}$$

と定めます。さらに、“外微分”

$$d: \mathcal{D}^k(X) \rightarrow \mathcal{D}^{k+1}(X)$$

を、各 $(f, \pi_1, \dots, \pi_k) \in \mathcal{D}^k(X)$ に対し、

$$d(f, \pi_1, \dots, \pi_k) := (1, f, \pi_1, \dots, \pi_k) \quad (4.1)$$

と定めます。ただし、1 は X 上で恒等的に 1 となる定数関数です。

定義 4.1 ([AK]). 多重線形汎関数 $T: \mathcal{D}^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$ が X 中の k 次元カレントとは、以下の三つの公理を満たすときを言う。

(連続性) $f \in \text{Lip}_b(X)$ を固定する。各 $i \in \{1, \dots, k\}$ に対し、 $\pi_i^j \in \text{Lip}(X)$ が関数 π_i に $j \rightarrow \infty$ の時に X 上で各点収束して、 $\sup_{i,j} \text{Lip}(\pi_i^j) < \infty$ を満たすならば、

$$T(f, \pi_1, \dots, \pi_k) = \lim_{j \rightarrow \infty} T(f, \pi_1^j, \dots, \pi_k^j)$$

となる。ここで、 $\text{Lip}(g)$ は g のリプシッツ定数を表す。

(局所性) $(f, \pi_1, \dots, \pi_k) \in \mathcal{D}^k(X)$ に対し, もしある $i \in \{1, \dots, k\}$ が存在して, π_i が $\{f \neq 0\}$ 上で定数ならば,

$$T(f, \pi_1, \dots, \pi_k) = 0$$

となる.

(有限体積) X 上のタイト¹な有限ボレル測度 μ が存在して,

$$|T(f, \pi_1, \dots, \pi_k)| \leq \prod_{i=1}^k \text{Lip}(\pi_i) \int_X |f| d\mu \quad (4.2)$$

を任意の $(f, \pi_1, \dots, \pi_k) \in \mathcal{D}^k(X)$ に対して成り立たせる.

式(4.2)を満たす有限ボレル測度のうち, 最小なものを記号 $\|T\|$ で表し, T の mass measure と言う. この $\|T\|$ もまたタイトである. X 上の k 次元カレント全体の集合を $\mathbf{M}_k(X)$ と書く. T の台をその mass measure の台と定める.

次は, 基本的なカレントの例です.

例 4.2 ([AK]). $\theta \in L^1(\mathbb{R}^k)$ に対し, $[\theta] : \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$[\theta](f, \pi_1, \dots, \pi_k) := \int_{\mathbb{R}^k} \theta f \det(\partial\pi_i/\partial x_j) dx$$

と定めると $[\theta] \in \mathbf{M}_k(\mathbb{R}^k)$ となる.

有限体積公理によって, カレント T の定義域は“有界ボレル可測形式”の空間にまで一意的に拡張されます. 特に, ボレル集合 $A \subset X$ に対して, k 次元カレント $T \in \mathbf{M}_k(X)$ の A への制限

$$T|_A : \mathcal{D}^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

を

$$T|_A(f, \pi_1, \dots, \pi_k) := T(\chi_A f, \pi_1, \dots, \pi_k)$$

と定める事ができます. ここで, χ_A は A の定義関数です. すると, $T|_A \in \mathbf{M}_k(X)$ となります.

距離空間の間のリプシッツ写像 $\varphi : X \rightarrow Y$ に対し, カレント $T \in \mathbf{M}_k(X)$ の φ による押し出し $\varphi_{\#}T : \mathcal{D}^k(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\varphi_{\#}T(f, \pi_1, \dots, \pi_k) := T(f \circ \varphi, \pi_1 \circ \varphi, \dots, \pi_k \circ \varphi)$$

と定めると, $\varphi_{\#}T \in \mathbf{M}_k(Y)$ となります.

¹ここで, μ がタイトとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対し, $\mu(X - K) < \epsilon$ となるコンパクト集合 $K \subset X$ が存在する時を言う.

4.2 ノーマルカレントと整数係数カレント

定義 4.3 ([AK]). 整数 $k \geq 1$ に対して, 多重線形汎関数 $T : \mathcal{D}^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$ の境界

$$\partial T : \mathcal{D}^{k-1}(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

を

$$\partial T = T \circ d$$

と定める. ここで, $d : \mathcal{D}^{k-1}(X) \rightarrow \mathcal{D}^k(X)$ は, (4.1) で定めた外微分である. また, $T : \mathcal{D}^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $\partial T = 0$ と定める.

明らかに, ∂T は多重線形で, 境界 ∂ は連続性と局所性を保存します. また, T が局所性を満たす多重線形汎関数ならば,

$$\partial \partial T = 0 \tag{4.3}$$

が成立します.

定義 4.4 ([AK]). カレント $T \in \mathbf{M}_k(X)$ の境界 ∂T が有限体積公理を満たす時, T をノーマルカレントと呼ぶ. k 次元ノーマルカレントの全体の集合を $\mathbf{N}_k(X)$ と書く.

式 (4.3) より, $(\mathbf{N}_*(X), \partial)$ は鎖複体を成す事が分かりました. コンパクト台を持つ k 次元ノーマルカレント全体を $\mathbf{N}_k^c(X)$ と書く事にすると, $(\mathbf{N}_*^c(X), \partial)$ は $(\mathbf{N}_*(X), \partial)$ の部分複体となる事が分かります.

距離空間 X の部分集合 S が countably \mathcal{H}^k -rectifiable とは, 可算個のボレル集合 $B_j \subset \mathbb{R}^k$ とリプシッツ写像 $\varphi_j : B_j \rightarrow X$ が存在して,

$$\mathcal{H}_X^k(X - \bigcup_{j=1}^{\infty} \varphi_j(B_j)) = 0$$

となる時を言います. ここで, \mathcal{H}_X^k は k 次元ハウスドルフ測度を表します.

定義 4.5 ([AK]). $k \geq 1$ とする. カレント $T \in \mathbf{M}_k(X)$ が rectifiable であるとは, 次の二つの条件を満たす時を言う.

- $\|T\|$ は \mathcal{H}_X^k に対して絶対連続である. すなわち, ボレル集合 $A \subset X$ で $\mathcal{H}_X^k(A) = 0$ となるものに対し, $\|T\|(A) = 0$ となる.

- ある countably \mathcal{H}^k -rectifiable な集合 $S \subset X$ が存在して,

$$\|T\|(X - S) = 0$$

を満たす.

更に, rectifiable カレント $T \in \mathbf{M}_k(X)$ が **integer rectifiable** であるとは, 次の条件

- 任意の開集合 $U \subset X$ とリプシッツ写像 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ に対し, ある可積分整数値階段関数 $\theta \in L^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{Z})$ が存在して,

$$\varphi_{\#}(T \llcorner U) = \llbracket \theta \rrbracket$$

となる.

を満たす時を言う.

0次元カレント $T \in \mathbf{M}_0(X)$ が **integer rectifiable** とは, ある有限個の $\theta_j \in \mathbb{Z}$ と点 $x_j \in X$ が存在して, 任意の有界ボレル可測関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$$T(f) = \sum_j \theta_j f(x_j)$$

となる時を言う.

定義 4.6 ([AK]). カレント $T \in \mathbf{M}_k(X)$ が **整数係数カレント** (integral current) とは, それが integer rectifiable かつノーマルの時を言う. k 次元整数係数カレント全体の集合を $\mathbf{I}_k(X)$ と表す.

定理 4.7 ([AK]). (integer) rectifiable なノーマルカレントの境界は再び (integer) rectifiable である.

定理 4.7 より, $(\mathbf{I}_*(X), \partial)$ は $(\mathbf{N}_*(X), \partial)$ の部分複体となります. コンパクト台を持つ k 次元整数係数カレント全体の集合を $\mathbf{I}_k^c(X)$ と表します:

$$\mathbf{I}_*^c(X) = \mathbf{N}_*^c(X) \cap \mathbf{I}_*(X).$$

以上より, $(\mathbf{I}_*^c(X), \partial)$ は鎖複体となります. このホモロジーを

$$H_*^{IC}(X) := H_*(\mathbf{I}_*^c(X))$$

と書きます. これが定理 1.1 に現れるひとつのホモロジーです.

次が, Reidweg-Schäppi の定めた自然変換です.

例 4.8 ([RS]). 特異リプシッツ鎖 $c \in S_k^L(X)$ が

$$c = \sum_{\sigma} a_{\sigma} \sigma \quad (\text{有限和})$$

と (一意的に) 表されている時, $[c] : \mathcal{D}^k(X) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$[c](f, \pi_1, \dots, \pi_k) := \sum_{\sigma} a_{\sigma} \int_{\Delta^k} f \circ \sigma \det(\partial(\pi_i \circ \sigma)/\partial x_j) dx$$

と定めると, $[c] \in \mathbf{I}_k^c(X)$ となる. さらに, 境界は

$$\partial[c] = [bc] \quad (4.4)$$

を満たす.

式 (4.4) は, 写像

$$[\cdot] : S_*^L(X) \rightarrow \mathbf{I}_*^c(X)$$

が鎖準同型である事を言っています.

定理 1.1 の半分は, もし X が WLLC ならば, $[\cdot] : S_*^L(X) \rightarrow \mathbf{I}_*^c(X)$ が誘導するホモロジーの間の写像

$$[\cdot]_* : H_*^L(X) \rightarrow H_*^{IC}(X)$$

が同型である事を主張しています.

5 証明の方法 — 余層 —

この節は, 定理 1.1 の証明に用いた方法をできるだけ一般の形で紹介する事を目的とします. そのために Bredon ([B]) が導入した余層という概念を復習します.

位相空間 X に対し, $\mathbf{O}(X)$ を X の開集合全体の集合とし, これを通常の方法で圏とみなします. すなわち, $U, V \in \mathbf{O}(X)$ に対し, $U \subset V$ の時, ただ一つの射 $U \rightarrow V$ が存在するとし, そうでない時, 射はないとします. 記号 \mathbf{C} でアーベル群と準同型全体の圏または, 鎖複体と鎖準同型全体の圏を表す事にします. この時, 共変関手 $\mathfrak{A} : \mathbf{O}(X) \rightarrow \mathbf{C}$ を X 上の \mathbf{C} 値の前余層 (precosheaf) と言います. 射 $U \rightarrow V$ によって決まる射 $\mathfrak{A}(U \rightarrow V) : \mathfrak{A}(U) \rightarrow \mathfrak{A}(V)$ を, 単に $i_{V,U}$ と表す事にします.

前余層 \mathfrak{A} が余層 (cosheaf) であるとは, 任意の開集合族 $\{O_\alpha\}$ に対し,

$$\bigoplus_{\alpha, \beta} \mathfrak{A}(O_\alpha \cap O_\beta) \xrightarrow{\Phi_1} \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{A}(O_\alpha) \xrightarrow{\Phi_0} \mathfrak{A}(O) \rightarrow 0$$

が完全である時を言います. ここで, $O = \bigcup_{\alpha} O_\alpha$ であり,

$$\Phi_0 = \sum_{\alpha} i_{O, O_\alpha}, \quad \Phi_1 = \sum_{\alpha, \beta} i_{O_\beta, O_\alpha \cap O_\beta} - i_{O_\alpha, O_\alpha \cap O_\beta}$$

であります.

例 5.1 ([B]). 位相空間 X に対し, 対応 $O(X) \ni U \mapsto S_*(U) \in \mathbb{C}$ は明らかに前余層である. しかし, これは一般に余層ではない. 重心細分を取る鎖準同型 $\text{sd} : S_*(U) \rightarrow S_*(U)$ を用いて, 帰納極限

$$\mathfrak{S}_*(U) := \varinjlim (S_*(U) \xrightarrow{\text{sd}} S_*(U) \xrightarrow{\text{sd}} S_*(U) \xrightarrow{\text{sd}} \dots)$$

を考える. すると, 対応 $U \mapsto \mathfrak{S}_*(U)$ は余層である. 重心細分 sd と恒等射 $\text{id} : S_*(U) \rightarrow S_*(U)$ は鎖ホモトープなので, canonical な自然同型

$$H_*(\mathfrak{S}_*(X)) \cong H_*(X)$$

が存在する.

上の例と同様にして, 距離空間 X に対し, $\{S_*^L(U) \xrightarrow{\text{sd}} S_*^L(U) \xrightarrow{\text{sd}} \dots\}$ の帰納極限 $\mathfrak{S}_*^L(U)$ を考えると, 対応 $U \mapsto \mathfrak{S}_*^L(U)$ は余層であり, 自然同型 $H_*(\mathfrak{S}_*^L(X)) \cong H_*^L(X)$ が存在します. また, $c \in S_*^L(X)$ に対し, $[c] = [\text{sd}(c)]$ が成立するので, $[\cdot] : \mathfrak{S}_*^L \rightarrow \mathbf{I}_*^c$ が代表元の取り方によらずに定義できます.

文献 [M] の中で, 私が証明した事を余層の言葉だけを使って表現すると次の形になります.

定理 5.2 ([M]). X をパラコンパクト位相空間, \mathfrak{A} と \mathfrak{A}' を X 上の鎖複体の圏に値を持つ前余層とする. さらに, 次を仮定する.

- (a) 任意の $m \leq -2$ と X の開集合 $U \subset X$ に対して, $\mathfrak{A}_m(U) = \mathfrak{A}'_m(U) = 0$;
- (b) 各 $m \geq 0$ に対し, アーベル群の圏に値を持つ X 上の前余層 $\mathfrak{A}_m, \mathfrak{A}'_m$ は脆弱²余層である;

²位相空間 X 上の前余層 \mathfrak{A} が脆弱とは, 任意の $U \in O(X)$ に対して, $i_{X,U}$ が単射である時を言う.

- (c) 自然変換 $[\cdot] : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ が存在して, 次を満たす. 各開集合 $U \subset X$ に対し, $[\cdot] : \mathfrak{A}_{-1}(U) \rightarrow \mathfrak{A}'_{-1}(U)$ は単射で $[\cdot] : \mathfrak{A}_0(U) \rightarrow \mathfrak{A}'_0(U)$ は全射である;
- (d) X の各開集合 U に対し, $\{\mathfrak{A}_j(U)\}_{j \geq -1}$ のホモロジーを取る対応と, $\{\mathfrak{A}'_k(U)\}_{k \geq 0}$ のホモロジーを取る対応は, それぞれ, 局所零³な前余層である.

その時, $[\cdot]$ が誘導する写像

$$[\cdot]_* : H_m(\mathfrak{A}_*(X)) \rightarrow H_m(\mathfrak{A}'_*(X))$$

は同型である. ここで, 鎖複体 C に対し, $H_*(C)$ は $\{C_k\}_{k \geq 0}$ のホモロジーを表す.

文献 [M] の中で, 弱局所リプシッツ可縮距離空間 X を固定して, \mathbf{I}_*^c を X 上の前余層と思ったときに, \mathbf{I}_*^c は定理 5.2 の \mathfrak{A}'_* に課された仮定を満足する事を証明しました. 定理 5.2 と例 5.1 とその直後より, 定理 1.1 が従います.

参考文献

- [AK] L. Ambrosio and B. Kirchheim. Currents in metric spaces. Acta Math. 185(1), 1–80 (2000)
- [B] G. E. Bredon. Sheaf Theory. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 170. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [MY] A. Mitsuishi and T. Yamaguchi. Locally Lipschitz contractibility of Alexandrov spaces and its applications. arXiv:1303.0655.
- [M] A. Mitsuishi. Locally Lipschitz contractibility and the homology of integral currents. arXiv:1304.0152.
- [RS] C. Riedweg and D. Schäppi. Singular (Lipschitz) homology and homology of integral currents. arXiv:0902.3831.
- [Y] T. Yamaguchi. Simplicial volumes of Alexandrov spaces. Kyushu J. Math. 51 (1997) 273–296.

³位相空間 X 上の前余層 H が局所零とは, 任意の $x \in X$ と開集合 $V \subset X$ で $x \in V$ なるものに対し, ある開集合 $U \subset X$ で, $x \in U \subset V$ かつ $H(U) \rightarrow H(V)$ が自明となるものが存在する時を言う.

一次元量子ウォークの諸相

東北大学大学院理学研究科

楯 辰哉*

1 序

タイトルの「量子ウォーク」とは、通常のランダムウォークの非可換類似物として定義される、ある Hilbert 空間上のユニタリ作用素のことである。もともと量子物理学において Aharonov-Davidovich-Zagury [3] が「量子ランダムウォーク」という言葉を初めて用いたのだが、その後「量子ウォーク」と呼ばれるようになり、定着したようである。文献 [3] においては、後述するような完全に離散化された定義はなされていないが、その後コンピュータ・サイエンスにおいて主に Aharonov-Ambainis-Kempe-Vazirani [1], Ambainis-Bach-Nayak-Vishwanath-Watrous [2], Nayak-Vishwanath [7] らによって、離散化された形で再発見された。当時コンピュータ・サイエンスのある分野において、Grover [6] らにより「量子空間検索アルゴリズム」が話題になっていたようであるが、Ambainis-Kempe-Rivosh [4] により Grover の検索アルゴリズムが二次元の量子ウォークを用いて改良されるなど、主に量子アルゴリズム論において応用されていて、現在では量子物理、コンピュータ・サイエンス、確率論などの広範にわたる分野において研究されている。国内においても、2000 年代初頭から今野紀雄先生やその共同研究者らにより活発に研究が行われている。量子ウォークの歴史的な背景、そして以前から知られていた性質については文献 [8], [10], [11] などを参照されたい。

筆者が量子ウォークに初めて出会ったのは今から 2 年半ほど前のある研究会 ([15] 参照) での砂田利一教授の講演においてであった。砂田教授が講演中に以下と同じグラフ[†]をスライドで表示されていたが、それを見て興味を持った、というのが筆者が研究を始めた動機であり、特に何かに応用しようというような意図があったわけではない。しかし研究が進むにつれ、量子ウォークの推移確率がある意味で固有関数、特にエルミート関数の漸近挙動と似た側面を持つことが分かり、ますます興味を持つようになった。これについては講演中に説明する。

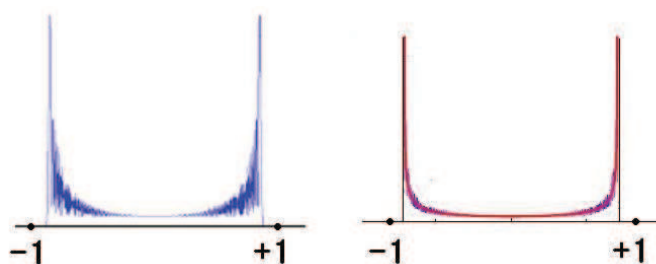


図 1: 量子ウォークの推移確率 (左) とその極限分布 (右)

本稿では、一次元の斉次な量子ウォークについて解説しつつ筆者が得た結果を紹介するが、もちろん、高次元の量子ウォークや一般のグラフ上の量子ウォークも考察されている。これらのうちで特に筆者が興味を持っている話題の幾つかについて、最後にコメントする。

*E-mail: tate@math.tohoku.ac.jp

[†]明治大学の町田拓也氏の作成したグラフである。

2 定義と性質

ここでは一次元の量子ウォークの定義を述べる. 冒頭でも述べた通り, 量子ウォークは Hilbert 空間上のユニタリ作用素として定義されるが, 考える Hilbert 空間は \mathbb{Z} 上の \mathbb{C}^2 に値をとる ℓ^2 関数全体の空間 $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ である. ここには内積

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathbb{C}^2}, \quad f, g \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$$

が定まっているとする. ただし上記において $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ は \mathbb{C}^2 の標準的な Hermite 内積である. また, \mathbb{C}^2 の標準的なノルムを以下では $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^2}$ と書くことにする. $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ には座標をずらすというシフト作用素 τ が

$$(\tau f)(x) = f(x-1) \quad (f \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2), x \in \mathbb{Z})$$

で定義される. τ はユニタリ作用素であることに注意しておく. 2 次特殊ユニタリ行列 $A \in SU(2)$ を取り, それを

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (2.1)$$

と表示しておく. 実際には A は単にユニタリ行列で良いのだが, スカラー倍は後の議論に影響しないため, 記述を簡単にするために特殊ユニタリ行列と仮定してある. ここで A を次のように分解する.[‡]

$$A = P + Q, \quad P = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -\bar{b} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

この分解を用いて, $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ 上の有界作用素 $U(A)$ を次で定義する.[§]

$$U(A) = P\tau + Q\tau^{-1}.$$

ただし一般に, 2 次正方行列 $X \in M_2(\mathbb{C})$ は自然に $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ 上の有界作用素に拡張されるが, これも X と書いている. A がユニタリ行列であることから, $U(A)$ がユニタリ作用素であることが容易に分かる. この作用素 $U(A)$ が一次元量子ウォーク (の推移作用素) である. $U(A)$ の定義式において $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ を $\ell^2(\mathbb{Z})$ に, P, Q を $p+q=1$ を満たす正の数 p, q にそれぞれ置き換えれば, 通常の \mathbb{Z} 上のランダムウォークの推移作用素が得られる. しかし, 通常のランダムウォークの推移作用素と $U(A)$ との重要な違いは, $U(A)$ がユニタリ作用素であること, そして P と Q が非可換であること, である. 通常のランダムウォークにおいては, 原点から出発して点 $x \in \mathbb{Z}$ へ n ステップで到達する確率 (推移確率) の長時間挙動 ($n \rightarrow \infty$ としたとき挙動) が, その主な研究対象であった. 量子ウォーク $U(A)$ に対しても次のようにして定義される推移確率 $p_n(A, \varphi; x)$ の長時間挙動がその中心的な問題である. まず, 任意の $y \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{C}^2$ に対して $\delta_y \otimes \varphi \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ を

$$(\delta_y \otimes \varphi)(x) = \begin{cases} \varphi & (x = y \text{ のとき}), \\ 0 & (x \neq y \text{ のとき}), \end{cases}$$

[‡]列で分解するのではなく, 行で分解する場合もあるが, ここでは列で分解した. なお両者は本質的に同等な推移確率を定義する.

[§][14] においては $U(A) = P\tau^{-1} + Q\tau$ と定義されているが, ここでの定義は文献 [18], [19] に合わせてある. そのため以下の定理の記述において [14] とは符号が異なる部分がある.

と定義する. このとき

$$p_n(A, \varphi; x) := \|U(A)^n(\delta_0 \otimes \varphi)(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 \quad (x \in \mathbb{Z}, \varphi \in \mathbb{C}^2, \|\varphi\|_{\mathbb{C}^2} = 1)$$

と定義し, $p_n(A, \varphi; x)$ を (0 から出発する初期スピン状態が φ の量子が n ステップ後に位置 x に発見される) 推移確率と呼ぶ. 実際, $U(A)$ がユニタリ作用素であること, そして φ が単位ベクトルであることから $\sum_{x \in \mathbb{Z}} p_n(A, \varphi; x) = 1$ が成り立つことが容易に分かる. つまり \mathbb{Z} 上の ($n \in \mathbb{Z}$ で係数づけられた) 確率分布の族 $\{p_n(A, \varphi; x)\}_{x \in \mathbb{Z}}$ が定義されたことになる. 以後, 推移確率 $p_n(A, \varphi; x)$ の漸近挙動を問題にするのだが, 始めに, つぎのような \mathbb{R} 上の確率測度の弱収束について考える:

$$d\mu_n^{A, \varphi} := \sum_{x \in \mathbb{Z}} p_n(A, \varphi; x) \delta_{x/n}. \quad (2.2)$$

式 (2.2) での $\delta_{x/n}$ は $x/n \in \mathbb{R}$ に重み 1 を持つ Dirac 測度である. 通常のランダムウォークについて同様の確率測度を定義すると, それは $n \rightarrow \infty$ のときに平均での Dirac 測度に弱収束する. これは有名な「大数の法則」である. 量子ウォークの場合に確率測度 $d\mu_n^{A, \varphi}$ の弱極限についての定理を紹介する前に, 二つの特殊な場合について具体的に計算しておく. 以下では $\varphi \in \mathbb{C}^2$ を $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ と表示した.

例: 行列 A の表示式 (2.1) において $b = 0$ のとき. A は対角行列であるが, $|a| = 1$ に注意する. また $PQ = QP = 0$ となる. よって $U(A)^n = P^n \tau^n + Q^n \tau^{-n}$ となる. 従って $U(A)^n(\delta_0 \otimes \varphi) = \delta_n \otimes P^n \varphi + \delta_{-n} \otimes Q^n \varphi$ となる. P^n, Q^n の具体的な表示により, 推移確率は次のように計算される.

$$p_n(A, \varphi; x) = \begin{cases} |\varphi_1|^2 & (x = n \text{ のとき}), \\ |\varphi_2|^2 & (x = -n \text{ のとき}), \\ 0 & (x \neq \pm n \text{ のとき}). \end{cases}$$

従って特に確率測度 $d\mu_n^{A, \varphi}$ の弱極限について

$$\text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} d\mu_n^{A, \varphi} = |\varphi_1|^2 \delta_1 + |\varphi_2|^2 \delta_{-1}$$

が成り立つ. □

例: 式 (2.1) において $a = 0$ の場合を考える. このとき $|b| = 1$ であり,

$$P^2 = Q^2 = 0, \quad PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad QP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって $U(A)^2 = -I$ となる. これから特に

$$p_{2m}(A, \varphi; x) = \begin{cases} 1 & (x = 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (x \neq 0 \text{ のとき}), \end{cases} \quad p_{2m+1}(A, \varphi; x) = \begin{cases} |\varphi_1|^2 & (x = 1 \text{ のとき}), \\ |\varphi_2|^2 & (x = -1 \text{ のとき}), \\ 0 & (x \neq \pm 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

となる. 従って

$$\text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} d\mu_n^{A, \varphi} = \delta_0$$

となる. □

一般の $A \in SU(2)$ に対する $d\mu_n^{A, \varphi}$ の弱極限は次の定理により明らかにされた.

定理 2.1 (Konno [9]) 式 (2.1) において行列 A の成分 a, b について $ab \neq 0$ と仮定する. $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{C}^2$ を単位ベクトルとする. このとき確率測度の弱収束の意味で次が成り立つ.

$$\text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} d\mu_n^{A, \varphi} = \chi_{(-s, s)} \frac{r(1 + \lambda(A, \varphi)\xi)}{\pi(1 - \xi^2)\sqrt{s^2 - \xi^2}} d\xi. \quad (2.3)$$

ただし上式において $s = |a|, r = |b|$ であり, $\chi_{(-s, s)}$ は开区間 $(-s, s)$ の定義関数, そして $\lambda(A, \varphi)$ は

$$\lambda(A, \varphi) = |\varphi_2|^2 - |\varphi_1|^2 + \frac{2}{s^2} \text{Re}(ab\bar{\varphi}_1\varphi_2).$$

と定義される定数である. □

特に量子ウォークの推移確率は, 一般に大数の法則を満たさず, 従って独立同分布の確率変数の和としては書くことが出来ない. また, 上記の定理から確率分布 $p_n(A, \varphi; x)$ の分散は $O(n^2)$ であることが分かる. 通常のランダムウォークの推移確率の分散は $O(n)$ であり, それが理由で \sqrt{n} によるスケールングで中心極限定理が成り立つのだが, 量子ウォークの場合それとは大きく異なっている. また, 定理 2.1 の式 (2.3) の右辺の確率測度の密度関数は, $\xi = \pm s$ において発散している. 直線 $\xi = \pm s$ を以下では「壁」と呼ぶことにする. $0 < s < 1$ であるから, 「壁」は量子ウォークが到達できる限界のライン $\xi = \pm 1$ より手前にあることに注意しておく.

3 局所漸近公式

前節で, 量子ウォークの弱極限定理を紹介したが, そこには「壁」が現れた. この「壁」は, 量子ウォークの推移確率 $p_n(A, \varphi; x)$ 自身の長時間挙動を調べる上でさらに重要となる. 以下では推移確率 $p_n(A, \varphi; x)$ 自身の $n \rightarrow \infty$ のときの漸近挙動を紹介する.

定理 3.1 (Sunada-T [14]) 整数列 $y = y_n \in \mathbb{Z}$ と実数 $\xi \in (-s, s)$ が次を満たすと仮定する.

$$\xi_n := y_n/n = \xi + O(1/n) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (3.4)$$

このとき次が成り立つ.

$$p_n(A, \varphi; y_n) = \frac{(1 + (-1)^{n+y_n})r}{\pi n(1 - \xi^2)\sqrt{s^2 - \xi^2}} [1 - \lambda(A, \varphi)\xi + \text{OSC}_n(\xi_n) + O(1/n)]$$

ただし $\text{OSC}_n(\xi)$ は, $|\xi| < s$ 上のある滑らかな関数 $A(\xi), B(\xi), \theta(\xi)$ を用いて

$$\text{OSC}_n(\xi) = A(\xi) \cos(n\theta(\xi)) + B(\xi) \sin(n\theta(\xi))$$

と書かれる関数である. □

上記の定理 3.1 の仮定 (3.4) を見れば分かる通り, 定理 3.1 の局所漸近公式は「壁」の内側での推移確率 $p_n(A, \varphi; x)$ の長時間挙動を記述していて, そこでは振動を伴い $O(1/n)$ で減衰する挙動が見られる. 次に「壁」の周辺における局所漸近公式を述べる.

定理 3.2 (Sunada-T [14]) 整数列 $\{y_n\}$ が次を満たすと仮定する.

$$y_n = \pm ns + d_n, \quad d_n = O(n^{1/3}).$$

このとき次が成り立つ.

$$p_n(A, \varphi; y_n) = (1 + (-1)^{n+y_n}) \alpha^2 n^{-2/3} \left| \text{Ai}(\mp \alpha n^{-1/3} d_n) \right|^2 (1 \mp s \lambda(A, \varphi)) + O(1/n).$$

ただし $\alpha = (2/r^2 s)^{1/3}$ であり, $\text{Ai}(x)$ は Airy 関数である.

定理 3.2 は y_n/n が誤差 $O(n^{-2/3})$ で $\pm s$ に収束するような点列 y_n での漸近公式であり「壁」の周りで推移確率が Airy 関数で近似されるということを言い表している.

「壁」の外側における推移確率の挙動は以下の定理で記述される.

定理 3.3 (Sunada-T [14]) $s < |\xi| < 1$ を満たす実数 ξ をとる. 整数列 $\{y_n\}$ が ξ に対して式 (3.4) を満たすと仮定する. このとき次が成り立つ.

$$p_n(A, \varphi; y_n) = \frac{r(1 + (-1)^{n+y_n})}{\pi n(1 - \xi^2) \sqrt{\xi^2 - s^2}} e^{-nH(\xi_n)} (G(\xi) + O(1/n)).$$

ただし $\xi_n = y_n/n$ であり $G(\xi)$ は $s < |\xi| < 1$ 上の非負値の滑らかな関数, そして関数 $H(\xi)$ は

$$H(\xi) = 2|\xi| \log \left(r|\xi| + \sqrt{\xi^2 - s^2} \right) - 2 \log \left(r + \sqrt{\xi^2 - s^2} \right) + (1 - |\xi|) \log(1 - \xi^2) - 2|\xi| \log s$$

で定義される, $s < |\xi| < 1$ 上の正値凸関数である.

定理 3.3 の漸近公式は $\xi \in \mathbb{R}$ が $|\xi| > s$ を満たしているため「壁」の外側での推移確率 $p_n(A, \varphi; x)$ の挙動を表している. つまり「壁」の外側では推移確率は指数減衰している. なお, 見かけ上初期状態 φ への依存性が無いように見えるが, 関数 $G(\xi)$ が初期状態 φ に依存している. この「壁」の外側での漸近挙動は次の大偏差型の極限定理を導くことに注意しておく.

系 3.4 $\xi \in \mathbb{R}$ が $s < |\xi| < 1$ を満たし, かつ整数列 $\{y_n\}$ が条件 (3.4) を満たすと仮定する. 十分大きな任意の n に対して $p_n(A, \varphi; y_n) \neq 0$ ならば次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log p_n(A, \varphi; x_n) = -H(\xi).$$

4 無限二面体群とハミルトン作用素

今までは, 主に量子ウォークの推移確率に対する局所漸近公式について得られた結果を解説してきた. ここでは, 量子ウォーク $U(A)$ そのものについて考察する. 先に述べた通り $U(A)$ はユニタリ作用素である. 一般に量子系においては系の時間発展はユニタリ作用素で記述されるため, これは自然なことであるが, $U(A)$ の定義には「ハミルトン作用素」が現れない. つまり, ハミルトン作用素を考えず, いわば「見かけ上の量子系」を定義しているのである. ここでは $U(A)$ のハミルトン作用素を具体的に記述する. 以後, A の成分 (式 (2.1) 参照) について $ab \neq 0$ を仮定し,

$$s = |a|, \quad r = |b|, \quad \alpha = \frac{a}{|a|}, \quad \beta = \frac{b}{|b|} \quad (4.5)$$

とおく. また, 関数 $\phi_s(\theta)$ を

$$\phi_s(\theta) = \arccos(s \cos \theta)$$

と定義する. 任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して, 2 つの積分 $I(x), J(x)$ を次で定義する.

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix\theta} \sin \theta \frac{\phi_s(\theta)}{\sin \phi_s(\theta)} d\theta, \quad J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix\theta} \frac{\phi_s(\theta)}{\sin \phi_s(\theta)} d\theta.$$

さらに関数 $\mathcal{D}: \mathbb{Z} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ を次で定義する.

$$\mathcal{D}(x) = \begin{pmatrix} s\alpha^x I(x) & -ir\alpha^{x+1}\beta J(x+1) \\ ir\alpha^{x-1}\beta^{-1}J(x-1) & -s\alpha^x I(x) \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

そして $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ 上の作用素 D を次で定義する.

$$D = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}(y) \tau^y. \quad (4.6)$$

作用素 D は有界自己共役作用素であることが容易に分かる.

定理 4.1 (T [19]) $U(A) = e^{iD}$ が成り立つ.

つまり, 式 (4.6) で定義した有界自己共役作用素 D が量子ウォーク $U(A)$ のハミルトン作用素であるが, D の定義からは, これが何故 $U(A)$ のハミルトン作用素となっているのか, にわかには分からない. そこで作用素 D の導出方法を説明する. フーリエ変換 $\mathcal{F}: L^2(S^1, \mathbb{C}^2) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ を

$$(\mathcal{F}k)(x) = \int_{S^1} z^{-x} k(z) \frac{dz}{2\pi iz} \quad (x \in \mathbb{Z})$$

と定義すると, $\mathcal{F}: L^2(S^1, \mathbb{C}^2) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ はユニタリ同型である. \mathcal{F} により $U(A)$ は次の作用素に変換される.

$$\mathcal{T} := \mathcal{F}^{-1}U(A)\mathcal{F}, \quad (\mathcal{T}k)(z) = T(z)k(z), \quad T(z) = \begin{pmatrix} az & bz^{-1} \\ -\bar{b}z & \bar{a}z^{-1} \end{pmatrix} \quad (z \in S^1).$$

S^1 上の行列値関数 $T(z)$ は $U(A)$ の定義において τ を z に置き換えたものである. 従って

$$T(z) = e^{iL(z)} \quad (z \in S^1) \quad (4.7)$$

を満たす行列値関数 $L(z)$ を求めればハミルトン作用素の形が特定できる. $T(z)$ は $z \in S^1$ のとき特殊ユニタリ行列だから, あるユニタリ行列 $R(z)$ により対角化できる:

$$T(z) = R(z)K(z)R(z)^*, \quad K(z) = \begin{pmatrix} \lambda(z) & 0 \\ 0 & \lambda(z)^{-1} \end{pmatrix}.$$

ここで $\lambda(z) = e^{i\phi(z)}$ ($\phi(z) \in \mathbb{R}$) と表示すると, $K(z) = e^{iL_o(z)}$, $L_o(z) = \begin{pmatrix} \phi(z) & 0 \\ 0 & -\phi(z) \end{pmatrix}$ となるから, $L(z) = R(z)L_o(z)R(z)^*$ とおけば (4.7) を満たす行列値関数 $L(z)$ が求まる. しかしここでは, 無限二面体群の表現を用いて $T(z)$ の n 乗を有効に計算する方法を紹介する. ($T(z)^n$ を求めれば n について $n=0$ で形式的に微分すれば式 (4.7) を満たす L が求められる.)

無限二面体群 Γ とは $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ で定義される群である. ただしここで $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ は自然に (かけ算で) \mathbb{Z} に作用するものとする. Γ の生成元 a, b として特に $a = (1, 1), b = (0, -1)$ を取ることが出来る. a, b の満たす関係式は次の通りである.

$$ab = ba^{-1}, \quad b^2 = 1.$$

ここで二つの行列

$$V_\zeta = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \bar{\zeta} \end{pmatrix}, \quad W_\eta = \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ -\bar{\eta} & 0 \end{pmatrix} \quad (\zeta, \eta \in S^1)$$

を考える. これら二つの行列 V_ζ, W_η は共に特殊ユニタリ行列で,

$$U(A) = sU(V_\alpha) + rU(W_\beta), \quad T(z) = sV_{\alpha z} + rW_{\beta z^{-1}} \quad (z \in S^1) \quad (4.8)$$

が成り立つことに注意しておく. ただし $\alpha, \beta \in S^1$ は式 (4.5) で定義されているものである. 二つの行列 V_ζ, W_η は次の関係式を満たす.

$$V_\zeta W_\eta = W_\eta V_\zeta^{-1}, \quad W_\eta^2 = -I. \quad (4.9)$$

つまり,

$$\rho(a) = V_\zeta, \quad \rho(b) = -iW_\eta$$

とおくと, 無限二面体群の表現 $\rho: \Gamma \rightarrow U(2)$ が得られる. そこで一般に $\rho: \Gamma \rightarrow U(\mathcal{H})$ を (ある Hilbert 空間 \mathcal{H} への) ユニタリ表現とする. ただし $U(\mathcal{H})$ は Hilbert 空間 \mathcal{H} 上のユニタリ作用素全体のなす群である. そして $V = \rho(a), W = i\rho(b)$ とおくと, 式 (4.9) において V_ζ, W_η を V, W にそれぞれ置き換えた式が成り立つ. 式 (4.8) の第一式において $U(V_\alpha), U(W_\beta)$ をそれぞれ V, W に置き換えた式で U を定義する. つまり

$$U = sV + rW$$

とおくと $s^2 + r^2 = 1$ と先の V, W の関係式により U はユニタリ作用素となる. 従って U の n 乗を計算すれば良い.

補題 4.2 (T [18]) n を正の整数とすると次が成り立つ.

$$U^n = T_n(x) + (iy + w)U_{n-1}(x) = T_n(x) + U_{n-1}(x)(iy + w).$$

ただし作用素 x, y, w はそれぞれ, $x = \frac{s}{2}(V + V^*), y = \frac{s}{2i}(V - V^*), w = rW$ で定義され, $T_n(x), U_{n-1}(x)$ はそれぞれ n 次第 1 種 Chebyshev 多項式, $n-1$ 次第 2 種 Chebyshev 多項式である. \square

この表示を式 (4.8) の第二式に対して適用して

$$T(z)^n = \begin{pmatrix} \frac{p_n(\alpha z)}{-q_n(\alpha z)} & \frac{q_n(\alpha z)}{p_n(\alpha z)} \end{pmatrix} \quad (z \in S^1),$$

$$p_n(z) = T_n(s(z + z^{-1})/2) + \frac{s}{2}(z - z^{-1})U_{n-1}(s(z + z^{-1})/2), \quad q_n(z) = r\alpha\beta z^{-1}U_{n-1}(s(z + z^{-1})/2)$$

が得られ, Chebyshev 多項式の性質を用いて計算すれば

$$T(e^{i\theta}) = e^{iL(\theta)}, \quad L(\theta) = \frac{\phi_s(\theta)}{\sin \phi_s(\theta)} \begin{pmatrix} s \sin(\theta + \mu) & -ir\beta e^{-i\theta} \\ ir\beta^{-1} e^{i\theta} & -s \sin(\theta + \mu) \end{pmatrix}, \quad \alpha = e^{i\mu}$$

が成り立つことが分かり, $L(\theta)$ により定まる作用素をフーリエ逆変換すればハミルトン作用素 D が得られる. なお, 式 (4.8) に関連して, $\rho_{\text{GW}}(a) = U(V_\alpha), \rho_{\text{GW}}(b) = U(W_\beta)$ とおくと, 無限二面体群 Γ のユニタリ表現 $(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2), \rho_{\text{GW}})$ が (量子ウォークを経由して) 得られるがこれについては次が成り立つ.

定理 4.3 (T [19]) 量子ウォークから定義される無限二面体群 Γ の表現 $(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2), \rho_{\text{GW}})$ は Γ の正則表現 $(\ell^2(\Gamma), R)$ とユニタリ同値である。 \square

つまり一次元量子ウォークとは、無限二面体群 Γ の群環 $\mathbb{C}[\Gamma]$ のある特殊なユニタリ元であることが分かった。なお補題 4.2 は先の Konno 極限定理 (定理 2.1) の初等的な証明 ([18]) にも利用されることに注意しておく。またここでは対角化ではなく二面体群の性質を利用した $T(z)^n$ の計算法を紹介した。残念ながらこれが本質的に効く定理を筆者は得ていないが効果的な計算法と考えている。次節に応用され得る問題について述べてある。

講演では、ハミルトン作用素 (4.6) と、いわゆる「連続時間量子ウォーク」との関連、そして弱極限の補間についての定理を紹介する予定である。

5 終わりに

最後に、特に今後考察されるべきであると筆者が考える研究課題を列挙して本稿を終えることにする。

- **半古典極限:** 一次元量子ウォークにおいても半古典極限については数値解析的な結果・予想はあるものの ([13]) 一般的な考察は十分とは言えない。量子ウォークには「スピン状態」に対応したパラメータ (\mathbb{C}^2 の部分) が含まれている。このスピン状態の次数をあげ、その極限をとる操作をここでは半古典極限と呼ぶ。実際、 $2N$ 次元の $SU(2)$ 既約表現 V_N は超平面直線束 $L \rightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2$ を用いて $V_N = H^0(\mathbb{C}P^1, L^{2N-1})$ と書くことが出来る。従って極限 $N \rightarrow \infty$ を半古典極限と呼ぶことは自然である。ここでは具体的な定式化を述べることはしないが、本文中の無限二面体群の関係式を用いた作用素の n 乗の計算はここでも有効にはたらくことは確認済みである。しかし初期条件が N に依存するため、より精密な議論が必要となり、まだまとまった結果は得られていない。

- **二次元量子ウォーク:** 一般に高次元の量子ウォークはほとんど手つかずの状態である。二次元の量子ウォークで特に Grover ウォークと呼ばれるものについては、その弱収束定理が [20] で得られているものの、その体系的な考察はなされていない。一次元量子ウォークにおいては無限二面体群が現れたが、二次元で Grover ウォークを含むあるクラスの量子ウォークを $\mathbb{Z}^2 \rtimes K$ (K はクラインの 4 元群) をもとに構成することが可能であり、このクラスの量子ウォークについては先の離散群の関係式を用いた議論が有効であろうと推測される。しかし計算はかなり煩雑になり、現時点ではまだ結果は得られていない。今後の大きな課題である。

- **結晶格子上的量子ウォーク:** 砂田利一教授 ([16]) により、一般の結晶格子 (有限グラフ上のアーベル被覆グラフ) に対して量子ウォークが定式化され、その漸近挙動が調べられている。これによると、例えば二次元の量子ウォークで、ある行列値関数の固有値が十分に良い振る舞いをする場合、過渡的 (transient) になるという結果が得られており、通常のランダムウォークとの著しい違いが発見されている。砂田教授による漸近公式においては、 n についての減衰度、そして振動しているという事実は見て取れるものの、その係数の具体的表示、ないしは幾何学的な翻訳はなされておらず、従って弱収束先にあたるものを特定するのは、難しい状況である。この砂田教授の漸近公式における係数の幾何学的な翻訳は、今後の課題であり、高次元の量子ウォークへの一つのアプローチとなるだろうと考えている。

- **量子ウォークの類似物:** Szegedy [17] により、Grover のアルゴリズムに類似した二部グラフ上のユニタリ作用素が構成されている。これは表現論的には無限二面体群の表現を二部グラフの構造により構成したということが出来るが、その作用素論的な性質、特に長時間挙動は調べられていない。また、いわゆ

る open quantum random walk と呼ばれる概念があり [5], [12] により調べられている. open quantum random walk は, その構成は量子ウォークと似た部分があるものの, 量子ウォークと異なり一般にユニタリ作用素でもなければ一般に自己共役作用素でもない. その挙動も通常のランダムウォークのように, 大数の法則や中心極限定理があるクラスの open quantum random walk に対して証明されるなど, 拡散的に振る舞うようである. しかしやはり一般論の展開はなされていない. これら二つは共に今後の発展が望まれる話題である.

● **仮想的な「ポテンシャル壁」**: 先の局所漸近公式を解説した際, 弱極限分布が発散する垂直な線を「壁」と呼んだ. 量子力学における固有状態の漸近挙動との対応からみると, この壁が「仮想的なポテンシャル」によって形成されるものであると考えれば上記の局所漸近公式における一見奇妙な挙動が自然に思えてくる. しかし, 量子ウォークの定義にはポテンシャルの情報はいっさい入っていない. ハミルトン作用素の連続極限などの操作を試しているが, 現在のところ, そのようなポテンシャルの情報は得られていない. 筆者はこの問題に対して, 定義通りそもそもポテンシャルの情報などはなく, これは力学系的に形成されるものであろうと考えている. しかしもしそうなら, どのような力学的な性質がポテンシャル壁とそっくりな「壁」を作り出すのか, そのメカニズムは分かっていない.

参考文献

- [1] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe and U. Vazirani, Quantum Walks on Graphs, *Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (2001), 55–59.
- [2] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath and J. Watrous, One-dimensional Quantum Walks, *Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (2001), 37–49.
- [3] Y. Aharonov, L. Davidovich and N. Zagury, Quantum random walks, *Phys. Rev. A* vol. **48**, no. 2 (1993), 1687–1690.
- [4] A. Ambainis, J. Kempe and A. Rivosh, Coins make quantum walks faster, *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 1099–1108, ACM, New York, 2005.
- [5] S. Attal, N. Guillotin-Plantard and C. Sabot, Central Limit Theorems for Open Quantum Random Walks, arXiv: 1206.1472.
- [6] L. K. Grover, Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack, *Phys. Rev. Lett.* **79**, no. 2 (1997), 325–328.
- [7] A. Nayak and A. Vishwanath, Quantum walk on the line, preprint (arXiv: quant-ph/0010117).
- [8] J. Kempe, Quantum random walks – an introductory overview, *Contemporary Physics*, vol. **44** (4), 307–327, 2003.
- [9] N. Konno, A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, *J. Math. Soc. Japan*, vol. **57** (2005), 1179–1195.
- [10] N. Konno, Quantum walks, *Quantum potential theory*, 309–452, *Lecture Note in Math.*, **1954**, Springer, Berlin, 2008.

- [11] 今野紀雄 著「量子ウォークの数理」産業図書, 2008 年.
- [12] N. Konno and H. J. Yoo, Limit theorems for open quantum random walks, *J. Stat. Phys.* **150** (2013), 299–319.
- [13] M. Sato, N. Kobayashi, M. Katori and N. Konno, Large Qubit Limit of One-dimensional Quantum Walks, preprint (arXiv:0802.1997 [quant-ph]), 2008.
- [14] T. Sunada and T. Tada, Asymptotic behavior of quantum walks on the line, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 2608–2645.
- [15] T. Sunada, “Quantum Walk”, a talk in the Long Term Workshop on “Geometry and Analysis”, held at Kyoto University, 2011.
- [16] T. Sunada, Unpublished manuscript, 2012.
- [17] M. Szegedy, Quantum Speed-up of Markov Chain Based Algorithms, Proceedings of the 45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (2004), 32–41.
- [18] T. Tate, An algebraic structure for one-dimensional quantum walks and a new proof of the weak limit theorem, preprint (arXiv: 1210.0631 [math. FA]), 2012. (To appear in Infinite Analysis, Quantum Probability and Related Topics.)
- [19] T. Tate, The Hamiltonians generating the one-dimensional discrete-time quantum walks, preprint (arXiv: 1306.3557 [math.FA]), 2013.
- [20] K. Watabe, N. Kobayashi, M. Katori and N. Konno, Limit distributions of two-dimensional quantum walks, *Phys. Rev. A* **77** (2008), 062331/1–9.